This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

[illegible]

Hist. of Sci.
Neugebauer
12-13-29
20634

Vorrede.

Die lange Verzögerung, welche in Betreff der Ausgabe des zweyten Theiles von diesem Lehrbuche gegen die in der Ankündigung des ersten Theiles gegebene Zusage eingetreten ist, legt mir die Pflicht auf, den P. T. Herrn Abnehmern des ersten Theiles hiemit öffentlich zu erklären, daß keineswegs nicht zu entschuldigende Saumseligkeit, sondern lediglich eine literärische mit meinen Berufspflichten in nächster Verbindung stehende Arbeit, welche beinahe durch den größten Theil des verflossenen Jahres meine freyen Stunden in Anspruch nahm, und von welchen ich Einige der P. T. Herrn Abnehmer in Kenntniß gesetzt habe, diese Verzögerung herbeigeführt habe, wozu ich jedoch die Versicherung füge, daß dieß keineswegs mit dem dritten und vierten Theile der Fall seyn, sondern daß deren Erscheinung pünktlich nach der nächstens zu erscheinenden Ankündigung statt finden werde.

Zugleich kann ich nicht unterlassen, Einiges über den Inhalt dieses Theiles in Kürze anzuführen.

Es dürfte mir von Einigen zum Vorwurfe gemacht werden, daß ich zahlreiche Sammlungen von Aufgaben

hier eingeschaltet habe, welche eigentlich in einem wissenschaftlichen Lehrbuche dieses Gegenstandes nicht am rechten Orte sind, indem in einem solchen Werke nur so viele Beispiele angeführt werden sollen, als zur Verdeutlichung und Darstellung der praktischen Anwendbarkeit eines jeden Satzes, in wiefern nämlich ein solches Lehrbuch zugleich ein praktisches ist, nothwendig angeführt werden müssen. Um diesem Vorwurfe zu begegnen, kann ich nicht unterlassen, zu erklären, daß ich allerdings von meinem früher gefaßten Plane, der theoretischpraktischen jedoch rein wissenschaftlichen Behandlung dieses Gegenstandes in drey Theilen einen vierten Theil als bloßen Anhang mit einer Sammlung von Aufgaben, nach den vorgetragenen Lehrsätzen geordnet, folgen zu lassen, theils aus eigenem Antriebe, theils aber auch auf vielseitige gegründete Aufforderung abgegangen sey.

Meine Verhältnisse gestatten mir es nicht, das Ganze auf Einmal zu liefern, da mir nur wenige freye Stunden zu Gebote stehen, um das bereits Fertige einer letzten Feile zu unterziehen und das Fehlende zu ergänzen. Da nun das Werk vorzüglich für Studierende an Gymnasien berechnet ist, diese aber, besonders in den untern Klassen, eines mehr praktischen als rein theoretischen Unterrichtes bedürfen: so habe ich durch diese Gründe und, wie ich oben angeführt, durch vielseitige auf ähnliche Ansichten gegründete Aufforderungen geachteter Männer bewogen, den anfänglich eingeschlagenen Weg in so fern geändert, als ich bereits im zweyten Theile einen Anhang

von 100 Aufgaben über die vier Grundrechnungsarten in ganzen und gebrochenen, genannten und ungenannten Zahlen, dann einen zweyten Anhang von 20 Aufgaben über die Lehre von Potenzen und Wurzeln eingeschaltet habe. Diese Aufgaben sind durchgehends neu und größtentheils aus der Statistik, Baukunst und andern Künsten und Gewerben nach den besten Zeitschriften des In- und Auslandes bearbeitet, wobei ich von den darin enthaltenen statistischen Angaben nur in so fern abzuweichen wagte, als eine solche Abweichung von gar keiner Bedeutung ist, wie z. B. die Hinweglassung der Einheiten und Zehner bei numerischer Aufzählung der Bevölkerung einzelner Länder oder großer Städte, was ohnedieß nie genau seyn kann, und täglich sich ändert. Auch sind diese Aufgaben so gestellt, daß sie, obgleich durch bloße Anwendung der vier Grundrechnungsformen, und letztere durch Zuziehung der Lehre von Potenzen und Wurzeln auflösbar, dennoch das Nachdenken und die Aufmerksamkeit in Auffindung der zur Auflösung anzuwendenden Rechnungsarten sehr in Anspruch nehmen, Und so glaube ich denn erwarten zu dürfen, die Einschaltung dieser Aufgaben werde dadurch, daß hiedurch die bereits erschienenen zwey Theile sogleich an praktischer Brauchbarkeit gewinnen, nicht nur entschuldigt, sondern gebilligt werden.

Da es der Raum nicht gestattete, in dem zweyten Theile die Lehre von Gleichungen ganz zu behandeln, so habe ich hier mit den allgemeinen Regeln über die

Auflösung der Gleichungen geschlossen, und werde mit den besondern Regeln über die Auflösung der Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten und der Anwendung dieser Lehre auf praktische Aufgaben den dritten Theil beginnen.

Schlüßlich glaube ich noch bemerken zu müssen, daß, obgleich das mathematische Studium an den Gymnasien nicht nach demselben Systeme, welches ich in meinem Lehrbuche befolgt habe, betrieben wird, dennoch das für jede Klasse Entsprechende, ohne dem Ganzen zu schaden, herausgehoben und mit dem vorgeschriebenen Vorgange in Einklang gebracht werden kann.

Leitmeritz, im Mai 1832.

Der Verfasser.

Inhalt.

Von Dezimalbrüchen.

	Seite
Erklärung	1
I. Vom Anschreiben und Aussprechen der Dezimalbrüche	2
II. Von der Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche, und der Dezimalbrüche in gemeine Brüche .	7
III. Addition der Dezimalbrüche	21
IV. Subtraktion der Dezimalbrüche	25
V. Multiplikation der Dezimalbrüche	28
VI. Division der Dezimalbrüche	31

I. Anhang.

Von den Rechnungsvortheilen bey Anwendung der vier Grundrechnungsarten	35

II. Anhang.

Aufgaben zur Übung über die vorgetragenen Rechnungsarten	52
Auflösungen der Aufgaben	72

Von Potenzen und Wurzeln.

Einleitung	79
I. Von Potenzen	85
A. Allgemeine Zahlen	85
B. Besondere Zahlen	103
Tafel der Quadrat- und Cubikzahlen von 1 — 100	108
II. Von Wurzeln	110
A. Allgemeine Zahlen	110
B. Besondere Zahlen	111

Seite.

Von Exponentialgrößen und Exponentialzahlen 135
I. Addition der Exponentialzahlen . . . 137
II. Subtraktion der Exponentialzahlen . . . 139
III. Multiplikation der Exponentialzahlen . . 140
IV. Division der Exponentialzahlen . . . 143
V. Potenziren und Wurzelziehen in Exponentialzahlen 151

Anhang.

Aufgaben zur Übung der Rechnungsarten in Exponentialzahlen.

Vorerinnerung 155
Aufgaben 157
Auflösungen 162

Gleichungen.

I. Einleitung 165
II. Allgemeine Regeln über die Auflösung der Gleichungen . 168

Von Dezimalbrüchen.

Erklärung.

Dezimalbrüche sind solche Brüche, deren Nenner zehn oder ein Produkt von Zehnern ist.

So sind z. B. die Brüche $\frac{1}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{18}{10000}$ u. s. w. Dezimalbrüche.

Dezimalbrüche sind daher nach der gegebenen Erklärung nur eine besondere Gattung von Brüchen, haben mit denselben alle Eigenschaften gemein, und unterscheiden sich nur insofern von gewöhnlichen Brüchen, die wir zum Unterschiede von den Dezimalbrüchen gemeine Brüche nennen wollen, daß sie zum Nenner allemal 1 mit einer oder mehreren angehängten Nullen haben.

Durch die Betrachtung des dekadischen Zahlensystemes ist man darauf gekommen, Dezimalbrüche ohne Nenner in Form ganzer Zahlen anzuschreiben.

Denn da vermög des dekadischen Zahlensystems jede Ziffer auf der nächst folgenden Stelle von der Rechten zur Linken einen zehnmal größeren Werth erhält: so muß auch umgekehrt jede Ziffer von der Linken zur Rechten auf der nächstfolgenden Stelle einen zehnmal kleineren Werth haben.

Bezeichnet man nun die Stelle der Einheit auf was immer für eine Art, z. B. durch ein Komma oder einen Punkt, so muß, wenn man auch nach diesem Zeichen rechts Ziffern anschreibt, der Werth der Stellen auf gleiche Weise abnehmen, so, daß die nächste Stelle rechts von den Einheiten einen zehnmal, die nächst folgende einen hundertmal u. s. w. kleinern Werth hat, als die Stelle der Einheiten selbst. Folglich muß die den Einheiten rechts zunächst

stehende Stelle Zehntel, die nächst folgende Hundertel u. s. w. bezeichnen. So würden z. B. in der Zahl 3333,3333, wo das Komma die Stelle der Einheiten bezeichnet, die Werthe der einzelnen Ziffern mit Bezug auf ihre Stellen folgende seyn:

$$3000,\ 300,\ 30,\ 3,\ \frac{3}{10},\ \frac{3}{100},\ \frac{3}{1000},\ \frac{3}{10000}.$$

Sollte man z. B. die Zahl $3\frac{4}{10}$ in Form einer ganzen Zahl anschreiben, so könnte dieß auf folgende Art geschehen: 3, 4; wo das Komma die Ziffer 3 als ganze Einheiten, die Ziffer 4 aber als Zehntheile von Einheiten bezeichnet.

Die nach dem zur Bezeichnung ganzer Zahlen angenommenen Zeichen rechts angeschriebenen Ziffern nennt man Dezimalziffern und ihre Stellen Dezimalstellen.

So sind z. B. in der Zahl 8,437 die Ziffern 4, 3, 7 Dezimalziffern. Das allgemein angenommene Zeichen zur Bezeichnung der Dezimalbrüche, wenn sie in Form ganzer Zahlen geschrieben werden, ist ein Komma. Indessen gibt es auch Werke, wo sie mit einem Punkte bezeichnet werden.

Man sieht hieraus, daß man Dezimalbrüche auch in Form ganzer Zahlen anschreiben könne, was allerdings von großer Wichtigkeit ist, indem man auf diese Art Brüche wie ganze Zahlen behandeln, und alle Rechnungsarten mit denselben leichter vollbringen kann.

I. Vom Anschreiben und Aussprechen der Dezimalbrüche.

Dezimalbrüche, wenn sie in Form ganzer Zahlen angeschrieben sind, können auf eine dreifache Art ausgesprochen werden.

1. Man spricht die Ganzen für sich, und jede Dezimalstelle mit dem ihr zukommenden Nenner aus.

Z. B. Man hätte die Dezimalzahl 843,6785 auszusprechen,

so würde man erstens die Ganzen für sich, nämlich 843 Ganze, und dann jede Dezimalstelle für sich aussprechen, nämlich: 6 Zehntel, 7 Hundertel, 8 Tausendtel, 5 Zehntausendtel.

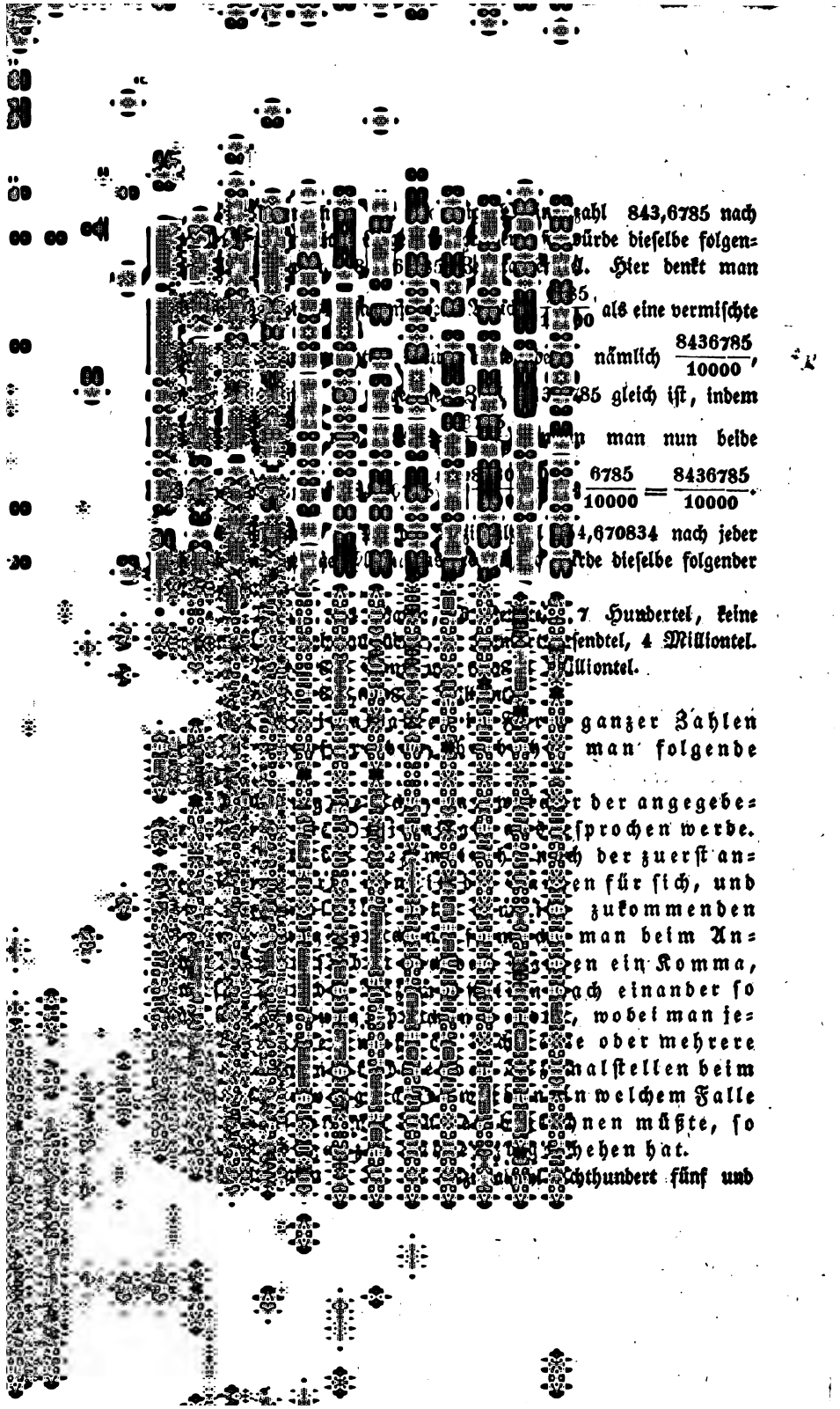
Bei dieser Art des Aussprechens denkt man sich den ganzen Dezimalbruch gleichsam in eben so viele Brüche zerlegt, als Dezimalstellen sind. So denkt man sich in unserm vorigen Beispiele die Zahl 843,6785 gleichsam zerlegt in 843 Ganze und $\frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000}$.

2. Man spricht die Ganzen für sich, und die ganze Dezimalzahl ebenfalls für sich, jedoch wie Ganze nur mit Anhängung des Nenners der letzten Dezimalstelle aus.

So würde die im vorigen Beispiele gegebene Dezimalzahl 843,6785 nach der jetzt gegebenen Anweisung auf folgende Art ausgesprochen werden: 843 Ganze und 6785 Zehntausendtel. Hier denkt man sich die ganze Zahl gleichsam aus einer Anzahl ganzer Einheiten und einem angehängten Bruche bestehend, nämlich: $843\frac{6785}{10000}$.

Daß die so ausgesprochene Zahl mit der vorigen gleichen Werth habe, wird man sogleich einsehen, wenn man den Bruch $\frac{6785}{10000}$ sich nach den Stellen des Zählers in Theile auflöset: nämlich: $\frac{6785}{10000} = \frac{6000}{10000} + \frac{700}{10000} + \frac{80}{10000} + \frac{5}{10000}$, und diese Brüche abkürzt, nämlich: $\frac{6000}{10000} = \frac{6}{10}$, $\frac{700}{10000} = \frac{7}{100}$, $\frac{80}{10000} = \frac{8}{1000}$, wo man sonach statt des Bruches $\frac{6785}{10000} = \frac{6000}{10000} + \frac{700}{10000} + \frac{80}{10000} + \frac{5}{10000}$ die Brüche $\frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000}$ wie vorhin, erhält.

3. Man spricht die ganze Dezimalzahl ohne Rücksicht auf das Komma sammt den Ganzen in Form einer ganzen Zahl, jedoch mit Anhängung des Nenners der letzten Dezimalstelle aus.



[illegible] zahl 843,6785 nach [illegible] würde dieselbe folgen= [illegible]. Hier denkt man [illegible] als eine vermischte [illegible] nämlich $\frac{8436785}{10000}$, [illegible] 785 gleich ist, indem [illegible] man nun beide [illegible] $\frac{6785}{10000} = \frac{8436785}{10000}$. [illegible] 4,670834 nach jeder [illegible] rde dieselbe folgender [illegible]

[illegible] 7 Hundertel, keine [illegible] sendtel, 4 Milliontel. [illegible] illiontel.

[illegible] ganzer Zahlen [illegible] man folgende [illegible]

[illegible] r der angegebe= [illegible] sprochen werde. [illegible] ch der zuerst an= [illegible] en für sich, und [illegible] zukommenden [illegible] man beim An= [illegible] en ein Komma, [illegible] ach einander so [illegible], wobei man je= [illegible] e oder mehrere [illegible] malstellen beim [illegible] in welchem Falle [illegible] nen müßte, so [illegible] hehen hat.

[illegible] chthundert fünf und

siebenzig Ganze, drei Zehntel, 4 Tausendtel, 5 Zehntausendtel in Form einer ganzen Zahl anschreiben, so würde man zuerst die Zahl 875 anschreiben, und dieselbe durch ein Komma als Ganze bezeichnen; sodann die Stelle der Zehntel mit 3, die Stelle der Hundertel, da sie nicht ausgesprochen wurde, mit 0, die Stelle der Tausendtel mit 4, und die Stelle der Zehntausendtel mit 5 besetzen, und so die Zahl 875,3045 anschreiben.

3. Wird die Dezimalzahl so ausgesprochen, daß die Ganzen für sich, und die Dezimalstellen ebenfalls für sich, jedoch in Form einer ganzen Zahl und nur mit Anhängung des Nenners der letzten Dezimalstelle ausgesprochen werden: so mache man beim Anschreiben derselben nach den Ganzen ein Komma, und schreibe rechts zu demselben die in Form einer ganzen Zahl ausgesprochene Dezimalzahl nach den Regeln ganzer Zahlen an, wobei man jedoch noch Acht haben muß, ob der zuletzt ausgesprochene Nenner nicht mehr Nullen hat, als die angeschriebene Dezimalzahl Dezimalstellen enthält. Ist dieß der Fall, so muß man zwischen das Komma und den angeschriebenen Dezimalbruch noch so viel Nullen setzen, als Dezimalstellen fehlen.

Sollte man z. B. die Zahl sieben hundert drei und vierzig Ganze, acht tausend vierhundert zwei und neunzig Zehntausendtel, anschreiben, so würde man zuerst die Ganzen ansetzen, nämlich 743; sodann dieselben durch ein Komma bezeichnen, und nach demselben die ausgesprochenen Dezimalstellen 8492 anschreiben, nämlich 743,8492, da der zuletzt ausgesprochene Nenner, nämlich 10000, vier, und folglich eben so viel Nullen enthält, als in dem Dezimalbruche Dezimalstellen sind.

Wäre die Dezimalzahl zwei und vierzig Ganze, neun hundert, sechs und dreißig Zehntausendtel anzuschreiben, so würde man zuerst die Ganzen, nämlich 42 ansetzen, dieselben mit einem Komma bezeichnen, und nach demselben den Dezimalbruch 936 anschreiben. Da aber der zuletzt ausgesprochene Nenner vier Nullen hat, während der Dezimalbruch nur 3 Dezimalstellen enthält: so müßte man nach dem Komma erst noch eine Nulle,

und nach derselben endlich den Dezimalbruch anschreiben, nämlich: 42,0936.

4. Wird die ganze Dezimalzahl ohne Rücksicht auf das Komma in Form einer ganzen Zahl, jedoch mit Anhängung des Nenners der letzten Dezimalstelle ausgesprochen: so schreibe man dieselbe nach den Regeln ganzer Zahlen an, und schneide sodann durch ein Komma von der Rechten zur Linken so viele Dezimalstellen ab, als der zuletzt ausgesprochene Nenner Nullen hat.

Sollte man z. B. die Dezimalzahl 8 Millionen, viermal hundert zwei und dreißig tausend, acht hundert ein und zwanzig Zehntausendtel anschreiben: so würde man zuerst die ausgesprochene Zahl in Form einer ganzen Zahl anschreiben, nämlich: 8432821, sodann durch ein Komma von der Rechten gegen die Linke eben so viele Dezimalstellen abschneiden, als der zuletzt ausgesprochene Nenner 10000 Nullen hat, folglich vier, und es würde die Dezimalzahl so angeschrieben erscheinen: 843,2821. Bleibt nach dem Abschneiden der nöthigen Dezimalstellen durch das Komma zur Linken desselben keine Ziffer mehr übrig, so setzt man eine Nulle an die Stelle derselben, um anzuzeigen, daß die gegebene Dezimalzahl keine Ganzen enthalte. Sollte man z. B. die Zahl vier hundert acht und dreißig Tausendtel anschreiben, so würde dieselbe so angeschrieben erscheinen: 0,438.

Hat endlich die ausgesprochene Dezimalzahl nicht so viel Ziffern, als der zuletzt ausgesprochene Nenner Nullen hat, so werden zur Linken noch so viel Nullen angesetzt, als Dezimalstellen fehlen, und sodann nach dem Komma noch eine Nulle angeschrieben. Sollte man z. B. die Dezimalzahl sieben hundert vier und achtzig Milliontel anschreiben, so müßte man zur Linken der Zahl 784 noch drei Nullen ansetzen, da der Nenner Milliontel sechs Nullen hat, und die Dezimalzahl folglich sechs Dezimalstellen haben muß; sodann erst das Komma und nach diesem noch eine Nulle anschreiben, nämlich: 0,000784.

Die zuletzt angegebene Art des Aussprechens und Anschreibens der Dezimalzahlen ist die gewöhnlichste.

Endlich gibt es noch eine dritte Art, Dezimalbrüche anzu-

schreiben, indem man sich der sogenannten Dezimalexponenten bedient. Diese Dezimalexponenten sind Ziffern, welche etwas kleiner unmittelbar über der letzten Ziffer der Dezimalzahlen angeschrieben werden, und die Anzahl der Nullen bezeichnen, welche der Nenner der angeschriebenen Dezimalzahl haben sollte. So würde z. B. in der Dezimalzahl 84375^{4} die Zahl 4 als Dezimalexponent anzeigen, daß der Nenner dieser Zahl 1 mit vier Nullen ist, nämlich: $84375^{4} = \frac{84375}{10000} = 8{,}4375$.

II. Von der Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche, und der Dezimalbrüche in gemeine Brüche.

Das Verfahren, gemeine Brüche in Dezimalbrüche und Dezimalbrüche in gemeine Brüche zu verwandeln, ist eigentlich nichts anderes, als die Verwandlung gegebener Brüche ohne Veränderung ihres Werthes in Brüche von einem andern Nenner, und man wird daher nach denselben Regeln Viertel, Fünftel, Achtel, als gemeine Brüche, in die Dezimalbrüche, Zehntel, Hundertel und Tausendtel verwandeln, wie man $\frac{3}{4}$ in einen Bruch von dem Nenner 8 verwandelt.

Da wir bei der Lehre von gemeinen Brüchen gezeigt haben, daß man einen gegebenen Bruch ohne Veränderung seines Werthes in einen Bruch von einem anderen Nenner verwandle, indem man den neuen Nenner durch den Nenner des gegebenen Bruches dividirt, und sodann mit dem erhaltenen Quotienten Zähler und Nenner des gegebenen Bruches multiplizirt: so wird man auch jeden gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln, indem man den Nenner eines Dezimalbruches z. B. 10, 100 oder 1000 u. s. w. durch den Nenner des gegebenen gemeinen Bruches dividirt und mit dem Quotienten Zähler und Nenner des gemeinen Bruches multiplizirt; z. B. man sollte den gemeinen Bruch $\frac{4}{5}$

in einen Dezimalbruch, z. B. in Zehntel verwandeln, so würde man den Nenner 10 durch 5 dividiren, nämlich: 10 : 5 = 2, und sodann den Zähler 4 und den Nenner 5 mit dem Quotienten 2 multipliziren, so ist $\frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8$ der verlangte Dezimalbruch. Eben so könnte man den gemeinen Bruch $\frac{5}{8}$ in einen Dezimalbruch von dem Nenner 1000 verwandeln, nämlich: 1000 : 8 = 125, $\frac{5 \times 125}{8 \times 125} = \frac{625}{1000} = 0{,}625$.

Allein so wie sich nicht jeder gemeine Bruch ohne Veränderung seines Werthes auf jeden beliebigen Nenner bringen läßt, eben so wenig kann jeder gemeine Bruch ohne Veränderung seines Werthes in einen Dezimalbruch verwandelt werden. So wie nämlich die Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen anderen Bruch von demselben Werthe nur dann möglich ist, wenn sich der neue Nenner durch den Nenner des gegebenen Bruches ohne Rest theilen läßt: eben so kann ein gemeiner Bruch nur dann in einen Dezimalbruch verwandelt werden, wenn der Nenner des Dezimalbruches 10, 100, 1000 u. s. w. durch den Nenner des gegebenen gemeinen Bruches theilbar ist.

Da nun ferner die Nenner aller Dezimalbrüche nur Zehner, oder Produkte von Zehnern sind, und folglich nur die einfachen Faktoren 2 und 5 enthalten: so können auch nur diejenigen gemeinen Brüche in Dezimalbrüche verwandelt werden, deren Nenner 2 oder 5, oder Produkte von diesen Faktoren sind, z. B. 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 50, u. s. w.

Allein obgleich man nicht jeden gemeinen Bruch genau in einen Dezimalbruch von demselben Werthe verwandeln kann, so kann man doch jedesmal einen Dezimalbruch finden, welcher von dem Werthe des gegebenen gemeinen Bruches so unbedeutend abweicht, daß der Unterschied beinahe gar nicht zu beachten ist.

Sollte man z. B. den Bruch $\frac{2}{3}$ in einen Dezimalbruch verwandeln, so könnte dieß auf folgende Art geschehen: Man multiplizire Zähler und Nenner desselben mit 10, oder was eben so viel ist, man hänge zum Zähler und Nenner eine Nulle an,

nämlich $\frac{20}{30}$, wodurch, wie bekannt, der Werth des Bruches nicht geändert wird, und kürze sodann diesen Bruch durch die bedeutende Ziffer des Nenners, folglich hier durch 3 ab, so ist mit Hinweglassung des im Zählen verbleibenden Restes der Bruch $\frac{20}{30}\Big|^{3} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ der gewünschte Dezimalbruch.

Dieser Bruch ist zwar etwas kleiner, als der gegebene Bruch $\frac{2}{3}$, allein der Unterschied beträgt nicht einmal $\frac{1}{10}$; denn $\frac{7}{10}$ wäre schon größer als $\frac{2}{3}$, welches sogleich ersichtlich wird, wenn man $\frac{2}{3}$ und $\frac{7}{10}$ auf gleiche Benennung bringt, nämlich $\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$, und $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$. Wollte man den Bruch $\frac{2}{3}$ noch genauer in einen Dezimalbruch verwandeln, so multiplizire man Zähler und Nenner mit 100, nämlich $\frac{200}{300}$ und kürze ihn wieder durch 3 ab, so ist $\frac{200}{300}\Big|^{3} = \frac{66}{100} = 0{,}66$.

Dieser Bruch ist zwar abermals etwas kleiner, als $\frac{2}{3}$, aber der Unterschied beträgt jetzt schon weniger als $\frac{1}{100}$, welches man ebenfalls beweisen kann, wenn man sowohl $\frac{2}{3}$ als $\frac{67}{100}$ auf gleiche Benennung bringt. Um den Bruch $\frac{2}{3}$ noch genauer in einen Dezimalbruch zu verwandeln, multiplizire man Zähler und Nenner desselben mit 1000, 10000, 100000 u. s. w. und so wird endlich in dem Falle, wo man ihn mit 1000000 multiplizirt, der Unterschied nicht einmal $\frac{1}{1000000}$ betragen.

Und so kann man jeden gemeinen Bruch, wenn nicht ganz, doch äußerst genau in einen Dezimalbruch desselben Werthes verwandeln.

Dieß Verfahren läßt sich aber noch vereinfachen, wenn man, statt dem Zähler und Nenner eine gewisse Anzahl Nullen anzuhängen, den Bruch sogleich in eine Division verwandelt, deren Dividend der Zähler, der Divisor aber der Nenner ist, sodann in dem Falle, daß sich der Zähler durch den Nenner nicht theilen läßt, im Quotienten eine Nulle an die Stelle der Ganzen anschreibt, nach dieser ein Komma setzt und sodann den Quotienten hinschreibt, den man erhält, indem man dem jedesmaligen Reste im Dividende eine Nulle anhängt. So würde man den Bruch $\frac{4}{7}$ nach der eben gegebenen Anleitung auf folgende Art in einen Dezimalbruch verwandeln:

$\frac{4}{7} = 4 : 7 = 0{,}571428$ u. s. w.

0
40
35
50
10
30
20
60
4 u. s. w.

Dieses ist eben so viel, als wenn man nach dem zuerst angegebenen Verfahren in dem Bruche $\frac{4}{7}$ Zähler und Nenner mit 1000000 multiplizirt und dann durch 7 abgekürzt hätte, nämlich:

$\frac{4000000}{7000000}\Big|^{7} = \frac{561428}{1000000} = 0{,}571428.$

Daher der Satz:

a. Man verwandelt einen gemeinen Bruch ohne Veränderung seines Werthes oder wenigstens möglichst genau in einen Dezimalbruch, wenn man den Zähler desselben durch den Nenner dividirt; sodann, wenn die Theilung in ganzen Zahlen nicht möglich ist, den jedesmaligen Rest durch Anhängung einer Nulle in Zehntel, Hunder-

tel, Tausendtel u. s. w. verwandelt, und die entsprechenden Quotienten als Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w. des zu bestimmenden Dezimalbruches anschreibt. Z. B. $\frac{7}{4}$ sollte in einen Dezimalbruch verwandelt werden, so wird dies auf folgende Art geschehen:

$$\frac{7}{4} = 7 : 4 = 1{,}75$$

4

30

20

Dieß Verfahren lehrt uns zugleich, wie man eine Division, bei welcher am Ende ein Rest bleibt, auch noch in Dezimalbrüchen fortsetzen und so den Quotienten noch genauer bestimmen könne. Z. B.

$$84793 : 4 = 21198$$

4

39

33

1

Da in dieser Division am Ende noch ein Rest bleibt, so kann man denselben durch Anhängung einer Nulle in Zehntel verwandeln, nach den Ganzen im Quotienten ein Komma machen, und nach demselben die folgenden Quotienten ansetzen, nämlich:

$$84793 : 4 = 21198{,}25$$

4

39

33

10

20

Daß 21198,25 der richtige Quotient sey, ist leicht zu erweisen, denn: $21198{,}25 \times 4 = 84793$

Allein, auch in Dezimalbrüchen fortgesetzt, läßt sich der Quotient mancher Zahlen nicht ganz genau bestimmen, sondern es gibt Fälle, wo die Division, ins Unendliche fortgesetzt, doch nicht aufgeht. In diesem Falle kommen im Quotienten nach

einer gewissen Anzahl von Stellen immer wieder dieselben Ziffern zum Vorschein. Z. B.:

3482 : 11 = 316,5454 u. s. w.

18
72
60
50
60
50
6 u. s. w.

Oder: 482 : 21 = 22,952380952380 u. s. w.

62
200
110
50
80
170
200
110
50
80
170
20 u. s. w.

b. Quotienten, in welchen dieselben Ziffern in derselben Ordnung bei fortgesetzter Division immer wieder zum Vorschein kommen, nennt man periodische Quotienten.

c. Die Reihe von Ziffern, welche bei periodischen Quotienten immer wieder in derselben Ordnung zurückkehrt, nennt man eine Periode.

Es gibt Perioden von 1, 2, und mehreren Ziffern. So ist z. B. in der Division:

19 : 6 = 3, 16666 u. s. w.
10
40
40
40
40
4 u. s. w.

die einzige Ziffer 6 die Periode, während die Periode in dem ersten der beiden vorhin gegebenen Beispiele 2 Ziffern, nämlich 36, in dem letztern aber 6 Ziffern, nämlich 952380 enthält.

d. Dezimalbrüche, deren Dezimalstellen in Perioden fortlaufen, nennt man periodische Dezimalbrüche.

e. Dezimalbrüche, bei welchen die Periode gleich mit der ersten Dezimalstelle anfängt, heißen rein periodische Dezimalbrüche.

f. Dezimalbrüche, bei welchen die Periode erst nach einer oder mehreren Dezimalstellen anfängt, heißen nicht rein periodische Dezimalbrüche.

So ist z. B. der Dezimalbruch 0,434343 oder 0,67596759 und so fort, ein rein periodischer, weil die Periode gleich mit der ersten Dezimalstelle anfängt.

Dagegen sind die Dezimalbrüche 0,46666 oder 0,387474 u. s. w. nicht rein periodische Dezimalbrüche, da ihre Perioden nicht gleich mit der ersten Dezimalstelle anfangen.

g. Wenn sich ein gemeiner Bruch nicht genau in einen Dezimalbruch verwandeln läßt, so schreibt man gewöhnlich nicht mehr, als sechs Dezimalstellen an, da bei der sechsten Dezimalstelle nach Weglassung der nachfolgenden der Unterschied zwischen dem gegebenen gemeinen Bruche und dem erhaltenen Dezimalbruche kaum $\frac{1}{1000000}$ beträgt, und vermehrt, um den Unterschied noch geringer zu machen, die letzte Dezimal-

stelle in dem Falle, daß die nächste weggelassene Dezimalstelle höher als fünf ist, um eine Einheit.

Z. B. man sollte den Bruch $\frac{3}{13}$ in einen Dezimalbruch verwandeln, so wird man dieß nach der bereits gegebenen Anleitung auf folgende Art vollbringen:

$$\frac{3}{13} = 3 : 13 = 0{,}230769 \text{ u. s. w.}$$

30
40
100
90
120
30 u. s. w.

und da der Dezimalbruch als ein periodischer ohne Ende fortgeht, nur sechs Dezimalstellen anschreiben, ohne jedoch die zuletzt angeschriebene Dezimalstelle 9 um eine Einheit zu vermehren, da die zunächst weggelassene nur 2, folglich unter 5 seyn würde. Dagegen würde man in dem Beispiele:

$$\frac{12}{19} = 12 : 19 = 0{,}631578 \text{ u. s. w.}$$

120
60
30
110
150
170
180 u. s. w.

zwar ebenfalls nur sechs Dezimalstellen anschreiben, aber die letzte Dezimalstelle 8 um eine Einheit vermehren, und folglich statt 8, 9 ansetzen, da die zunächst weggelassene Dezimalstelle höher als 5, nämlich 9 seyn würde.

Daß der so geänderte Dezimalbruch dem gegebenen gemeinen Bruche näher sey, als der oben erhaltene, läßt sich sehr deutlich darstellen, wenn man alle drei Brüche auf gleiche Benennung bringt, um sodann die beiden Dezimalbrüche mit dem gemeinen Bruche vergleichen zu können, nämlich:

$$\frac{12}{19} = \frac{12 \times 1000000}{19 \times 1000000} = \frac{12000000}{19000000}$$

$$0{,}631578 = \frac{631578}{1000000} = \frac{631578 \times 19}{1000000 \times 19} = \frac{11999982}{19000000}$$

$$0{,}631579 = \frac{631579}{1000000} = \frac{631579 \times 19}{1000000 \times 19} = \frac{12000001}{19000000}$$

Vergleicht man nun die beiden Dezimalbrüche, nachdem sie mit dem gemeinen Bruche auf gleiche Benennung gebracht worden sind, mit demselben, so findet man, daß der erste, nämlich der unverändert gebliebene um $\frac{18}{19000000}$ zu klein sey, denn

$$\frac{11999982}{19000000} + \frac{18}{19000000} = \frac{12000000}{19000000};$$

dagegen ist der zweite nach der angegebenen Regel veränderte Dezimalbruch um $\frac{1}{19000000}$ zu groß; allein es ist gewiß ein bedeutend kleinerer Unterschied, wenn eine Zahl nur um $\frac{1}{19000000}$ zu groß, als wenn sie um $\frac{18}{19000000}$ zu klein ist.

Diese Verbesserung eines Dezimalbruches wendet man überhaupt allemal an, so oft man, der Kürze wegen, um leichter rechnen zu können, bei einem Dezimalbruche 1, 2, 3 oder mehr Dezimalstellen wegläßt; z. B. statt des Dezimalbruches 0,368476 könnte man kürzer auch folgenden 0,36848 oder 0,3685 oder 0,368, oder 0,37 u. s. w. anschreiben.

b. Dezimalbrüche, welche in Form ganzer Zahlen angeschrieben sind, werden in gemeine Brüche verwandelt, wenn man die Dezimalstellen als Zähler und zum Nenner 1 mit so vielen Nullen anschreibt, als Dezimalstellen vorkommen, und sodann diesen Bruch nach den Regeln gemeiner Brüche abkürzt.

So würde man z. B. den Dezimalbruch 0,875 in einen gemeinen Bruch verwandeln, wenn man die Dezimalstellen 875 als Zähler, und zum Nenner 1 mit 3 Nullen anschriebe, da in diesem Dezimalbruche 3 Dezimalstellen enthalten sind, nämlich:

$0{,}875 = \frac{875}{1000} = \frac{7}{8}$. Daß $\frac{7}{8}$ eben so groß sey, als 0,875, kann man leicht beweisen, wenn man $\frac{7}{8}$ wieder in einen Dezimalbruch verwandelt, nämlich:

$$\frac{7}{8} = 7 : 8 = 0{,}875$$
$$\underline{70}$$
$$60$$
$$\underline{40}$$
$$=$$

Daß aber diese Regel nur für nicht periodische Dezimalbrüche gelten könne, wird man sogleich einsehen, wenn man bedenkt, daß bei periodischen Dezimalbrüchen allemal ein Rest wegfällt, um welchen derselbe kleiner ist, als der gemeine Bruch, aus dem dieser periodische Dezimalbruch entstand. So gibt z. B. der periodische Dezimalbruch 0,714285, nach der obigen Regel in einen gemeinen Bruch verwandelt, $\frac{714285}{1000000} = \frac{142857}{200000}$ und beiläufig abgekürzt, den Bruch $\frac{14}{20}$ oder $\frac{7}{10}$, während derselbe eigentlich den Bruch $\frac{5}{7}$ geben sollte. Um daher eine Regel zu finden, nach welcher man periodische Dezimalbrüche genau in gemeine Brüche desselben Werthes verwandeln könnte, mache man folgende Betrachtung:

Wenn man z. B. den gemeinen Bruch $\frac{2}{3}$ in einen Dezimalbruch verwandelt, so gibt

$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}66 \text{ u. s. w.}$$
$$\underline{20}$$
$$20 \text{ u. s. w.}$$

einen periodischen Dezimalbruch, dessen Periode die Ziffer 6 ist. Wollte man nun statt des gemeinen Bruches $\frac{2}{3}$ den Dezimalbruch $0{,}6 = \frac{6}{10}$ annehmen, so ist derselbe zu klein, denn $\frac{6}{10}$

abgekürzt gibt $\frac{3}{5}$, was allerdings weniger ist, als $\frac{2}{3}$. Nehme man daher statt des Dezimalbruchs einen andern Bruch an, der dem Bruche $\frac{2}{3}$ näher und folglich größer als $\frac{6}{10}$ ist. Dieß kann auf doppelte Art geschehen, indem man nämlich entweder einen größern Zähler oder einen kleinern Nenner annimmt. Wir wollen, um auf eine leichtere Art zu einer allgemeinen Regel zu gelangen, den Nenner um eine Einheit vermindern, und folglich statt $\frac{6}{10}$ den Bruch $\frac{6}{9}$ annehmen. Dieser Bruch $\frac{6}{9}$ abgekürzt gibt richtig den Bruch $\frac{2}{3}$ wieder. Hätte man den obigen periodischen Dezimalbruch mit 2 Dezimalstellen geschrieben, so wäre $0{,}66 = \frac{66}{100}$ und nun der Nenner um eine Einheit vermindert $\frac{66}{99}$, abgekürzt wieder $\frac{2}{3}$. Eben so würde derselbe Dezimalbruch mit 6 Stellen angeschrieben, nämlich: 0,666666 nach dieser Anleitung genau wieder in den gegebenen gemeinen Bruch verwandelt werden können, wenn man nämlich statt $0{,}666666 = \frac{666666}{1000000}$ den um eine Einheit verminderten Nenner anschreibt: $\frac{666666}{999999} = \frac{2}{3}$.

Oder, man hätte den gemeinen Bruch $\frac{3}{11}$ in einen Dezimalbruch verwandelt, so gibt

$$\frac{3}{11} = 3 : 11 = 0{,}272727 \text{ u. s. w.}$$
$$\underline{30}$$
$$\underline{80}$$
$$30 \text{ u. s. w.}$$

einen periodischen Dezimalbruch, dessen Periode die Zahl 27 ist. Wollte man diesen periodischen Dezimalbruch wieder in den gegebenen gemeinen Bruch verwandeln, so würde dieß nach der eben gegebenen Anleitung geschehen können, nämlich indem man

statt $0{,}27 = \frac{27}{100}$ oder $0{,}2727 = \frac{2727}{10000}$ oder $\frac{272727}{1000000}$ die Brüche $\frac{27}{99}$, oder $\frac{2727}{9999}$, oder $\frac{272727}{999999}$ anschreibt und dieselben abkürzt, nämlich $\frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ $\frac{2727}{9999} = \frac{3}{11}$ und $\frac{272727}{999999} = \frac{3}{11}$.

Dieß gilt auch von allen übrigen rein periodischen Dezimalbrüchen; daher der Satz:

i. Ein rein periodischer Dezimalbruch wird in einen gemeinen Bruch desselben Werthes verwandelt, wenn man statt des periodischen Dezimalbruchs einen Bruch anschreibt, dessen Zähler die Periode selbst ist, und zum Nenner so viel Neuner, als die Periode Ziffern hat, und hierauf den Bruch abkürzt.

Z. B. Man sollte den rein periodischen Dezimalbruch 0,428571428571 in einen gemeinen Bruch verwandeln, so würde man einen Bruch anschreiben, dessen Zähler die Periode selbst, nämlich 428571, und dessen Nenner eben so viele Neuner sind, als die Periode selbst Ziffern enthält, nämlich $\frac{428571}{999999}$. Dieser Bruch gibt abgekürzt genau den Bruch $\frac{3}{7}$, aus welchem der obige Dezimalbruch gebildet wurde.

Bei nicht rein periodischen Dezimalbrüchen werden die Dezimalstellen, welche nicht zur Periode gehören, nach der früher gegebenen, dagegen die periodischen Dezimalstellen nach der jetzt gegebenen Regel behandelt; daher der Satz:

k. Ein nicht rein periodischer Dezimalbruch wird genau in einen gemeinen Bruch desselben Werthes verwandelt, wenn man zuerst einen Bruch anschreibt, dessen Zähler die Dezimalstellen vor der Periode, und dessen Nenner 1 mit so vielen Nullen sind, als Dezimalstellen vor der Periode stehen; hierauf einen zweiten Bruch bildet, dessen Zähler die Periode selbst, und dessen

Nenner so viel Neuner, als die Periode Ziffern hat, und so viel angehängte Nullen sind, als Dezimalstellen vor der Periode stehen; endlich die beiden Brüche addirt und abkürzt.

Z. B. Man sollte den nicht rein periodischen Dezimalbruch 0,833333 genau in einen gemeinen Bruch verwandeln, so würde man erstens einen Bruch bilden, dessen Zähler die Ziffer 8 vor der Periode, und dessen Nenner 1 mit einer Nulle ist, da nur eine Dezimalstelle vor der Periode steht, nämlich $\frac{8}{10}$; hierauf nach der obigen Anleitung einen zweiten Bruch anschreiben, dessen Zähler die Periode selbst, folglich 3, und dessen Nenner eben so viel Neuner, als Ziffern in der Periode, folglich hier einer, und eben so viel Nullen, als Dezimalstellen vor der Periode, folglich hier auch nur eine bilden, nämlich $\frac{3}{90}$; endlich beide Brüche addiren und abkürzen, nämlich: $\frac{8}{10} + \frac{3}{90} = \frac{72}{90} + \frac{3}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$.

Eben so gibt der nicht rein periodische Dezimalbruch 0,681818 bei seiner Verwandlung in einen gemeinen Bruch folgende Auflösung:

$$0{,}681818 = \frac{6}{10} + \frac{81}{990} = \frac{594}{990} + \frac{81}{990} = \frac{675}{990} = \frac{15}{22}.$$

Allgemein ließe sich dieser Satz auf folgende Art beweisen:

Es sey der gegebene periodische Dezimalbruch $= x$, die Zahl der Ziffern in der Periode $= m$, und die Periode selbst $= a$: so ist der Werth des Bruches x, dessen Periodenzahl unendlich ist:

$$x = \frac{a}{10^m} + \frac{a}{10^{2m}} + \frac{a}{10^{3m}} + \frac{a}{10^{4m}} \ldots$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit 10^m: so ist:

$$x \cdot 10^m = a + \frac{a}{10^m} + \frac{a}{10^{2m}} + \frac{a}{10^{3m}} \ldots$$

Da nun alle diese unendlich vielen Perioden

$$\frac{a}{10^m} + \frac{a}{10^{2m}} + \frac{a}{10^{3m}} \cdots\cdots$$

zusammengenommen den Werth von x geben müssen, so kann man statt dieser Theile auch x setzen, und es ist $x \cdot 10^m = a + x$; hieraus x beiderseits abgezogen, ist: $x \cdot 10^m - x = a$, dann x als Faktor herausgehoben ist $(10^m - 1)\ x = a$ und endlich x gefunden, ist: $x = \frac{a}{10^m - 1}$. Ist z. B. $m = 3$, d. h., hat diese Periode 3 Ziffern, so ist, wenn man statt m 3 setzt, $x = \frac{a}{10^3 - 1} = \frac{a}{1000 - 1} = \frac{a}{999}$. Es sey ferner die Dezimalzahl, welche der Periode voran geht $= b$, und die Anzahl ihrer Ziffern $= n$, so ist in diesem Falle der Werth des ganzen Dezimalbruches

$$y = \frac{b}{10^n} + \frac{a}{10^{n+m}} + \frac{a}{10^{n+2m}} + \frac{a}{10^{n+3m}} \cdots;$$

$$\frac{a}{10^{n+m}} + \frac{a}{10^{n+2m}} + \frac{a}{10^{n+3m}} \text{ u. s. w.}$$

kann man sich in Faktoren auflösen, nämlich:

$$\frac{a}{10^n \cdot 10^m} + \frac{a}{10^n \cdot 10^{2m}} + \frac{a}{10^n \cdot 10^{3m}} \cdots\cdots = \frac{1}{10^n} \cdot \left(\frac{a}{10^m} + \frac{a}{10^{2m}} + \frac{a}{10^{3m}} \text{ u. s. w.}\right)$$

Allein $\frac{a}{10^m} + \frac{a}{10^{2m}} + \frac{a}{10^{3m}}$ u. s. w. ist gleich x, folglich kann man statt dieser Theile x setzen, nämlich $\frac{1}{10^n} x$. Setzt man endlich statt x den oben gefundenen Werth, so hat man $\frac{1}{10^n} \cdot \frac{a}{10^m - 1} = \frac{a}{10^n (10^m - 1)}$ und dieser Werth in die Gleichung von y gesetzt, gibt $y = \frac{b}{10^n} + \frac{a}{10^n (10^m - 1)}$.

Hat z. B. die Dezimalzahl vor der Periode, wie in dem zuletzt gegebenen Beispiel 0,681818 eine Ziffer, so ist $n = 1$ und die Periode 2 Ziffern, so ist $m = 2$, und man hat $y = \frac{b}{10^1}$

$+\frac{a}{10^1(10^1-1)} = \frac{b}{10} + \frac{a}{10.99} = \frac{b}{10} + \frac{a}{990}$, und setzt man nun $1 = 6$ und $a = 81$, so ist $y = \frac{b}{10} + \frac{81}{990}$.

Für die Verwandlung nicht rein periodischer Dezimalbrüche in gemeine Brüche hat man auch noch folgende Regel:

1. Ein nicht rein periodischer Dezimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man die der Periode vorangehenden Ziffern als ganze Zahl betrachtet, von dem ebenfalls als ganze Zahl betrachteten gegebenen Dezimalbruche abzieht und den Rest durch eine Zahl dividirt, welche so viel Neuner als Ziffern in der Periode und so viel angehängte Nullen enthält als Dezimalstellen vor der Periode stehen. So würde man in obigem Beispiel 0,681, 6 von 681 abziehen, und den Rest 675 durch 990 dividiren, was ebenfalls $\frac{15}{22}$ gibt.

III. Addition der Dezimalbrüche.

Dezimalbrüche, wenn sie in Form ganzer Zahlen angeschrieben sind, werden addirt wie ganze Zahlen, indem man dieselben so unter einander schreibt, daß die gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen kommen und hierauf die Summen derselben an die gleichnamigen Stellen anschreibt, und das Komma in der Summe da ansetzt, wo es in den gegebenen Zahlen steht.

Sollte man z. B. die Dezimalbrüche 0,6473; 8,47529; 4,593826; 72,84561 addiren, so wird man sie zuerst nach den Regeln ganzer Zahlen unter einander anschreiben, so, daß Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w., und folglich auch die allenfalls vorkommenden Einheiten, Zehner u. s. w. unter einander zu stehen kommen, dieselben hierauf wie ganze Zahlen addiren, und das Komma in der Summe da anschreiben, wo es in der gegebenen Zahl steht, nämlich:

0,6473
8,47529
45,93826
72,84561
127,90646

Daß die Summe der Dezimalbrüche auf diese Art richtig gefunden werde, läßt sich aus der Addition gemeiner Brüche beweisen. Gemeine Brüche können nur dann addirt werden, wenn sie gleiche Nenner haben. Gemeine Brüche von gleicher Benennung werden addirt, indem man bloß die Zähler addirt, und den gemeinschaftlichen Nenner darunter schreibt. Auch hier werden bloß Brüche von gleicher Benennung addirt, indem man die Dezimalbrüche so unter einander schreibt, daß die gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen kommen und folglich bloß Zehntel zu Zehnteln, Hundertel zu Hunderteln u. s. w. addirt werden. Eben so werden hier nur die Zähler addirt, denn die Dezimalstellen sind nur die Zähler der Dezimalbrüche; so ist z. B. $0{,}6 = \frac{6}{10}$; $0{,}54 = \frac{54}{100}$ u. s. w. Endlich wird auch hier zur Summe der Zähler der gemeinschaftliche Nenner angeschrieben, indem man das Komma in der gefundenen Summe eben dahin setzt, wo es in den gegebenen Zahlen gestanden ist, wodurch die Summe der Zehntel wieder als Zehntel, die Summe der Hundertel wieder als Hundertel u. s. w. bezeichnet wird.

Man sieht zugleich hieraus, daß die Addition in Dezimalbrüchen viel leichter und schneller von Statten geht, als in gemeinen Brüchen; denn außerdem, daß man das oft längere Zeit erfordernde Geschäft, die gegebenen Brüche auf gleiche Benennung zu bringen, erspart, so erwächst aus dieser Addition der Dezimalbrüche auch noch der Vortheil, daß in der Summe sogleich die Ganzen zum Vorschein kommen, die sich durch die Addition der Brüche ergeben, was bei gemeinen Brüchen erst durch die Division des Zählers durch den Nenner geschehen muß.

Hat man daher gemeine Brüche zu addiren, so ist es gut, dieselben vorher in Dezimalbrüche zu verwandeln, und die Addition in Dezimalbrüchen zu verrichten. Z. B. man sollte die Brüche

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9}, \frac{3}{8}, \frac{4}{7}, \frac{6}{11}$ addiren, so könnte dieß auf folgende Art geschehen:

$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}666667$$
$$\frac{4}{5} = 4 : 5 = 0{,}8$$
$$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}833333$$
$$\frac{2}{9} = 2 : 9 = 0{,}222222$$
$$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$$
$$\frac{4}{7} = 4 : 7 = 0{,}571428$$
$$\frac{6}{11} = 6 : 11 = 0{,}545454$$
$$4{,}014104.$$

Diese Summe ist zwar der, welche man durch die Addition der gegebenen Brüche in Form gemeiner Brüche finden würde, nicht vollkommen gleich, denn diese würde folgende seyn:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{3} &= 18480\\ \frac{4}{5} &= 22176\\ \frac{5}{6} &= 23100\\ \frac{2}{9} &= 6160\\ \frac{3}{8} &= 10395\\ \frac{4}{7} &= 15840\\ \frac{6}{11} &= 15120\end{aligned}\right\} \quad 27720$$

$$\frac{111271}{27720} = 4\frac{391}{27720} = 4{,}014105.$$

Dieser Unterschied ist dadurch entstanden, daß unter den addirten Dezimalbrüchen einige periodische Dezimalbrüche vorkommen, deren Werthe den gegebenen Brüchen nicht ganz gleichkommen; allein er beträgt nur $\frac{1}{1000000}$ und ist folglich so unbedeutend, daß er ganz füglich übersehen werden kann.

Aufgaben zur Uibung.

I. Aufgabe. Die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{7}{15}$ sollen sowohl in Form gemeiner Brüche, als auch in Form der Dezimalbrüche addirt und der Unterschied beider Summen bestimmt werden.

II. Aufgabe. In einem Steinkohlenbergwerke beträgt die Ausbeute einer Woche an Steinkohlen am ersten Tage 38,427 Ctr.; am zweiten 16,3289 Ctr.; am dritten 36,84927 Ctr.; am vierten 8,9643 Ctr.; am fünften 27,849 Ctr.; und am sechsten Tage 19,5437 Ctr. Es frägt sich, wie groß die Ausbeute an Kohlen in dieser Woche gewesen sey?

III. Aufgabe. In einem Walde wurde in Verlauf von 5 Jahren folgende Anzahl von Klaftern Brennholz jährlich gefällt: nämlich im ersten Jahre 64,34 Klafter; im zweiten 128,374 Kl.; im dritten 75,36 Kl.; im vierten 86,459 Kl. und im fünften Jahre 112,384 Klafter. Es frägt sich: Wie viel Klafter Brennholz sind durch diesen fünfjährigen Zeitraum in diesem Walde gefällt worden?

Auflösungen.

I. Aufgabe. Die Summe der gegebenen Brüche, in Form gemeiner Brüche berechnet, ist $5\frac{25603}{360360}$; in Form der Dezimalbrüche berechnet 5,071048. Bringt man den gemeinen

Bruch $\frac{25603}{360360}$ auf einen Dezimalbruch, so gibt derselbe ebenfalls den Dezimalbruch 0,071048, und es ist folglich zwischen beiden Summen, wenigstens bis einschlüssig der Milliontel, gar kein Unterschied.

II. Aufgabe. Die Ausbeute an Kohlen wird 146,98217 betragen.

III. Aufgabe. Durch diesen fünfjährigen Zeitraum sind 466,917 Klafter Brennholz gefällt worden.

IV. Subtraktion der Dezimalbrüche

a. Dezimalbrüche werden subtrahirt wie ganze Zahlen, indem man den Subtrahendus so unter den Minuendus anschreibt, daß die gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen kommen, sodann die Unterschiede derselben an die gleichnamigen Stellen anschreibt, und das Komma in dem Unterschiede da ansetzt, wo es in den gegebenen Zahlen steht.

Sollte man z. B. 84,3475 von 121,5263 abziehen, so würde man den Subtrahendus 48,3475 so unter den Minuendus 121,5263 anschreiben, daß Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w. und folglich auch die allenfalls vorkommenden Einheiten, Zehner u. s. w. unter einander zu stehen kommen; hierauf wie bei ganzen Zahlen subtrahiren, und das Komma in dem Unterschiede da anschreiben, wo es in den gegebenen Zahlen steht, nämlich:

121,5263
84,3475
37,1788.

Daß der Unterschied der Dezimalbrüche auf diese Art richtig gefunden werde, läßt sich aus der Subtraktion gemeiner Brüche beweisen.

Gemeine Brüche können nur subtrahirt werden, wenn sie gleiche Nenner haben. Gemeine Brüche von gleicher Benennung

werden subtrahirt, indem man bloß die Zähler subtrahirt und den gemeinschaftlichen Nenner unter den Unterschied der Zähler anschreibt.

Auch bei Dezimalbrüchen werden nach der eben gegebenen Anleitung bloß Brüche von gleicher Benennung subtrahirt; denn indem man die gleichnamigen Stellen unter einander anschreibt, werden bloß Zehntel von Zehnteln, Hundertel von Hunderteln u. s. w. abgezogen. Eben so werden nur die Zähler der Dezimalbrüche abgezogen, indem die Dezimalstellen selbst, wie wir schon mehrmals gezeigt haben, eigentlich bloß die Zähler der Dezimalbrüche sind. Dadurch endlich, daß man das Komma in dem erhaltenen Unterschiede da ansetzt, wo es in den gegebenen Zahlen steht, wird auch zugleich der gemeinschaftliche Nenner angeschrieben. Da die Subtraktion in Dezimalbrüchen viel schneller vollbracht wird, als in gemeinen Brüchen, so ist es gut, gemeine Brüche, welche subtrahirt werden sollen, vorher in Dezimalbrüche zu verwandeln. Sollte man z. B. $\frac{3}{4}$ von $\frac{7}{8}$ subtrahiren, so könnte dieß auf folgende Art geschehen:

$$\frac{7}{8} = 7 : 8 = 0{,}875$$

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$$

$$0{,}125 \quad \frac{125}{1000} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

b. Sollte bei einer Subtraktion von Dezimalbrüchen der Minuendus weniger Dezimalstellen haben, als der Subtrahendus, so kann man an die Stelle der fehlenden Dezimalstellen Nullen ansetzen, da der Werth der Dezimalstellen durch Anhängung von Nullen nicht geändert wird, indem durch das Komma der Werth jeder Stelle bestimmt ist. Z. B.

Man sollte 38,4795 von 124,82 abziehen, so würde man, da der Minuendus 124,82 zwei Dezimalstellen weniger hat,

als der Subtrahendus, demselben zwei Nullen anhängen und dann subtrahiren, nämlich:

124,8200
38,4795
86,3405.

Aufgaben zur Uibung.

I. Aufgabe. Man soll $\frac{4}{17}$ von $\frac{9}{13}$ sowohl in Form gemeiner als Dezimal-Brüche abziehen und die beiden Unterschiede vergleichen.

II. Aufgabe. In einem Steinbruche wurden am ersten Tage einer Woche 8,49 Kubikklafter Bausteine; am zweiten 5,3; am dritten 9,457; am vierten 6,82; am fünften 7,93 und am sechsten 11,2 Kubikklafter Bausteine gebrochen. Dagegen am ersten Tage 5,37; am zweiten 6,57; am dritten 12,493; am vierten 7,8; am fünften 8,47 und am sechsten 4,36 Kubikklafter Bausteine verkauft. Frage: Wie groß ist der übrig gebliebene Vorrath an Bausteinen?

III. Aufgabe. Zum Behufe eines Baues wurden 1000 Kubikschuh Sand herbeigeschafft; davon wurden im Verlauf der ersten Woche $86\frac{4}{5}$, in der zweiten $112\frac{3}{4}$ und in der dritten $128\frac{7}{9}$ Kubikschuh verbraucht. Es frägt sich: Wie viel Kubikschuh Sand, in Dezimalbrüchen bestimmt, nach Verlauf dieser drei Wochen noch vorhanden gewesen seyen?

Auflösungen.

I. Aufgabe. Der Unterschied ist in Form gemeiner Brüche $\frac{101}{221}$, in Form der Dezimalbrüche 0,457013, welche beide Unterschiede gleich sind, da $\frac{101}{221}$, in einen Dezimalbruch verwandelt, auch 0,457013 gibt.

II. Aufgabe. Am Schlusse der Woche bleiben noch 4,134 Kubikklafter Bausteine übrig.

III. Aufgabe. Es verbleiben noch 671,672223 Kubikschuh Sand.

V. Multiplikation der Dezimalbrüche.

a. Dezimalbrüche werden multiplizirt wie ganze Zahlen, indem man während der Multiplikation auf das Komma keine Rücksicht nimmt, sodann aber im Produkte so viele Dezimalstellen durch ein Komma abschneidet, als beide Faktoren zusammen haben. Z. B.

Sollte man 3,457 mit 0,48 multipliziren, so suche man zuerst das Produkt dieser zwei Zahlen, ohne Rücksicht auf das Komma, nämlich: 3457 × 48 = 165936 und streiche sodann durch ein Komma so viele Dezimalstellen, als beide Faktoren zusammen haben, folglich 5, ab, so ist das Produkt von 3,457 × 0,48 = 1,65936.

Daß die Multiplikation der Dezimalbrüche auf diese Art richtig vollbracht werde, läßt sich ebenfalls aus der Multiplikation gemeiner Brüche beweisen.

Gemeine Brüche werden multiplizirt, indem man Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multiplizirt, und unter das Produkt der Zähler das Produkt der Nenner anschreibt.

Dasselbe wird auch bei der Multiplikation der Dezimalbrüche beobachtet; denn indem man die Dezimalzahlen ohne Rücksicht auf das Komma multiplizirt, werden eigentlich die Zähler multiplizirt, da die Dezimalstellen für sich nur die Zähler der Dezimalbrüche darstellen; und indem man hierauf vom Produkt so viele Dezimalstellen durch ein Komma abschneidet, als beide Faktoren zusammen haben, werden auch die Nenner multiplizirt. Denn da die Nenner der Dezimalbrüche immer 1 mit einer oder mehreren Nullen sind, und das Produkt allemal so viele Nullen hat, als die beiden Faktoren zusammen haben: so muß auch bei der Multiplikation der Dezimalbrüche der Nenner des Produktes

so viele Nullen haben, als die beiden Faktoren zusammen enthalten. Da nun bei Dezimalbrüchen, wenn sie in Form ganzer Zahlen angeschrieben werden, die Anzahl der Stellen des Nenners durch die, mittelst des Komma abgeschnittenen Dezimalstellen bezeichnet wird, so müssen auch vom Produkte der Dezimalbrüche so viele Dezimalstellen abgeschnitten werden, als beide Faktoren zusammen haben.

Am deutlichsten wird die Richtigkeit des gegebenen Verfahrens an einem Beispiele bewiesen. Z. B. Man sollte 4,35 mit 2,738 multiplizieren: so ist das Produkt nach der eben gegebenen Anleitung folgendes:

$$4{,}35 \times 2{,}738 = 11{,}91030 \text{ oder } 11{,}9103.$$

Um zu beweisen, daß dieß Produkt das richtige sey, schreibe man die oben gegebenen Faktoren in Form gemeiner Brüche an und suche ihr Produkt nach den Regeln der Multiplikation gemeiner Brüche, so ist: $4{,}35 = \frac{435}{100}$, und $2{,}738 = \frac{2738}{1000}$, folglich $\frac{435}{100} \times \frac{2738}{1000} = \frac{1191030}{100000}$ oder in Form ganzer Zahlen angeschrieben 11,9103.

b. Sollte bei der Multiplikation per Dezimalbrüche das Produkt weniger Dezimalstellen haben, als beide Faktoren zusammen, so setze man demselben links noch so viele Nullen vor, als Dezimalstellen fehlen, und noch eine mehr, worauf man das Komma nach der ersten Nulle ansetzt. Z. B.

Man sollte 0,234 mit 0,152 multiplizieren, so ist erstens das Produkt beider Faktoren ohne Rücksicht auf das Komma $234 \times 152 = 35568$; hierauf sollten von dem Produkte sechs Dezimalstellen abgezogen werden, da die beiden Faktoren zusammen so viel Dezimalstellen enthalten. Da aber das Produkt nur fünf Dezimalstellen hat, so setze man dem Produkte links noch eine Nulle mehr, folglich 2 Nullen vor, und schreibe sodann das Komma nach der ersten Nulle an, nämlich: 0,035568, denn

$0{,}234 = \frac{234}{1000}$, und $0{,}152 = \frac{152}{1000}$, folglich $\frac{234}{1000} \times \frac{152}{1000}$ $= \frac{35568}{1000000} = 0{,}035568$.

c. Ist einer der beiden Faktoren eine ganze Zahl, so wird die Multiplikation nach derselben Regel verrichtet. z. B.

$$6{,}435 \times 7 = 45{,}395.$$

d. Ein Dezimalbruch wird schnell mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplizirt, wenn man das Komma um 1, 2, 3 Stellen u. s. w. von der Linken gegen die Rechte rückt. Z. B.

$$6{,}8432 \times 1000 = 6843{,}2$$

denn $6{,}8432 \times 1000$ ist $= \frac{68432}{10000} \times 1000 = \frac{68432000}{10000} =$ $\frac{68432}{10} = 6843{,}2$.

Aufgaben zur Uibung.

I. Aufgabe. Die Stadt Wien hat eine Bevölkerung von 254000 Einwohnern; auf jeden Bewohner der Stadt entfällt ein Flächenraum von 3,513728 Quadratruthen. Es frägt sich daher: Wie groß ist der Flächenraum, den die ganze Stadt einnimmt?

II. Aufgabe. Das Kaiserthum Oesterreich enthält eine Bevölkerung von 30006850 Bewohnern. Da nun auf jeden derselben im Durchschnitt eine Fläche von 0,000405 Quadratmeilen kommt, so frägt es sich: Wie groß ist der Flächeninhalt des ganzen österreichischen Kaiserstaates?

III. Aufgabe. Man soll berechnen, wie viel Kubikschuh Sand ein Fuhrmann, der des Tages zwanzigmal fährt, und jedesmal 16,54 Kubikschuh Sand ladet, in sechs Tagen herbeiführen wird.

Auflösungen.

I. Aufgabe. Der Flächenraum, den die Stadt Wien einnimmt, beträgt 892486,912 Quadratruthen.

II. Aufgabe. Der Flächeninhalt des ganzen österreichischen Kaiserstaates ist 12152,73425 Quadratmeilen.

III. Aufgabe. Der Fuhrmann wird in sechs Tagen 1984,8 Kubikschuh Sand herbeiführen.

VI. Division der Dezimalbrüche.

a. Bei der Division der Dezimalbrüche können drei Fälle eintreten, nämlich:

1. Wenn der Dividend eine ganze Zahl und der Divisor ein Dezimalbruch ist.

2. Wenn der Dividend ein Dezimalbruch und der Divisor eine ganze Zahl ist.

3. Wenn Dividend und Divisor Dezimalbrüche sind.

Alle diese drei Fälle lassen sich aber bei Dezimalbrüchen, wenn sie in Form ganzer Zahlen geschrieben sind, unter eine Regel bringen.

Nur für den Fall, wo der Divisor die Zahl 10, 100, 1000 u. s. w. ist, wollen wir, der vortheilhaften Anwendung wegen, eine besondere Regel aufstellen, nämlich:

b. Ein Dezimalbruch wird schnell durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt, wenn man das Komma um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen von der Rechten gegen die Linke rückt. Z. B.

Man sollte 368,42 durch 100 dividiren, so ist 368,42 : 100 = 3,6842.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens leuchtet von selbst ein, wenn man bedenkt, daß durch das Fortrücken des Komma von der Rechten gegen die Linke jede Stelle einen zehnmal, hundertmal, tausendmal u. s. w. kleineren Werth erhält, je nachdem dasselbe um 1, 2, 3 Stellen u. s. w. fortrückt, denn was vor-

dem Einheiten waren, werden jetzt Zehntel, aus den früheren Zehnteln werden Hundertel u. s. w.

c. Dezimalbrüche können auf zweierlei Art dividirt werden:

1. Dezimalbrüche werden dividirt wie ganze Zahlen, indem man während der Division auf das Komma gar keine Rücksicht nimmt, sodann aber den Quotienten durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt oder multiplizirt, je nachdem der Divisor 1, 2, 3 u. s. w. Dezimalstellen weniger oder mehr hat, als der Dividend. Z. B.

Man sollte 7,704 durch 3,6 dividiren, so wird man die Division zuerst, wie bei ganzen Zahlen, ohne Rücksicht auf das Komma vollbringen, nämlich: 7704 : 36 = 214; sodann aber den Quotienten, da der Divisor zwei Dezimalstellen weniger hat als der Dividend, durch 100 dividiren, oder, was eben so viel ist, zwei Dezimalstellen von der Rechten gegen die Linke durch ein Komma abschneiden, nämlich 2,14. Daß 2,14 der richtige Quotient sey, wird durch die Probe ersichtlich, denn 2,14 × 3,6 = 7,704.

Sollte man 6,3 durch 0,025 dividiren, so wird man ebenfalls die Division vorläufig, wie bei ganzen Zahlen vollbringen, nämlich:

$$\begin{array}{r} 63 : 25 = 2{,}52; \\ \underline{130} \\ 50 \end{array}$$

sodann wird man diesen Quotienten, da der Divisor 2 Dezimalstellen mehr hat als der Dividend, durch 100 multipliziren, oder, was eben so viel ist, das Komma um 2 Stellen weiter von der Linken gegen die Rechte rücken, nämlich 252, wo man dann das Komma ganz wegläßt, da zur Rechten desselben keine Ziffern stehen.

Sollte man endlich 9,288 durch 0,36 dividiren, so ist der Quotient 9288 : 36 = 258 schon durch die bloße Division genau bestimmt, indem Divisor und Dividend gleich viele Dezimalstellen haben, und folglich mit dem Quotienten keine Veränderung vorgenommen zu werden braucht.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich folgendermaßen beweisen. Um einen Dezimalbruch vom Komma zu befreien, oder das Komma weglassen zu können, muß man denselben mit 10, 100, 1000 u. s. w. multipliziren, je nachdem er 1, 2, 3 u. s. w. Dezimalstellen hat; denn multiplizirt man ihn mit 10, so rückt das Komma um eine Stelle weiter von der Linken gegen die Rechte, wo sodann, wenn der Dezimalbruch nur Zehntel enthält, das Komma außerhalb der letzten Ziffer fällt, und folglich weggelassen werden kann. Enthält der Dezimalbruch Hundertel, so muß derselbe, um das Komma zu beseitigen, zweimal mit 10 oder mit 100 multiplizirt werden, und so fort. Indem man nun bei der Division der Dezimalbrüche während der Division selbst auf das Komma gar keine Rücksicht nimmt, und dasselbe folglich wegläßt, werden Divisor und Dividend durch 10, 100, 1000 u. s. w. multiplizirt, je nachdem sie 1, 2, 3 u. s. w. Dezimalstellen haben. Haben Divisor und Dividend gleich viele Dezimalstellen, so werden beide durch die Weglassung des Komma mit derselben Zahl multiplizirt, und der Quotient bleibt folglich unverändert. Hat der Divisor mehr Dezimalstellen als der Dividend, so wird derselbe durch die Weglassung des Komma mit einer 10=, 100=, 1000mal u. s. w. größeren Zahl multiplizirt, als der Dividend, je nachdem er 1, 2, 3 u. s. w. Stellen mehr hat, als derselbe, und man erhält daher einen 10=, 100=, 1000=mal u. s. w. kleinern Quotienten, als man erhalten sollte, nach dem aus der Division bekannten Satze: der Quotient wird eben so vielmal kleiner, als der Divisor größer wird. Man muß daher in diesem Falle den Quotienten wieder mit 10, 100, 1000 u. s. w. multipliziren, um den wahren Quotienten zu erhalten.

Hat endlich der Divisor weniger Dezimalstellen, als der Dividend, so wird durch das Weglassen des Komma der Dividend mit einer 10=, 100=, 1000mal u. s. w. größeren Zahl multiplizirt, als der Divisor, und man erhält daher einen 10=, 100=, 1000mal u. s. w. zu großen Quotienten, weswegen man denselben durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividiren muß.

2. Dezimalbrüche werden dividirt, indem man zuerst untersucht, ob Divisor und Dividend gleich viele Dezimalstellen haben; sodann in dem Falle,

daß einer von beiden weniger Dezimalstellen hat, demselben soviele Nullen anhängt, als Dezimalstellen fehlen; endlich das Komma bei beiden wegläßt und die Division wie bei ganzen Zahlen verrichtet. Z. B.

Man sollte 4,7232 durch 0,384 dividiren, so untersuche man zuerst, ob Divisor und Dividend gleich viele Dezimalstellen haben. Da hier der Dividend 4, der Divisor aber nur 3 Dezimalstellen hat, so hänge man dem letztern statt der fehlenden Dezimalstelle eine Nulle an, nämlich: 0,3840, und dividire sodann nach Weglassung des Komma wie bei ganzen Zahlen, nämlich:

47232 : 3840 = 12,3
3840
=8832
7680
11520
11520
=====

Daß die Division auf diese Art richtig vollbracht werde, läßt sich folgendermaßen beweisen. Durch Anhängung der Nullen wird der Werth eines Dezimalbruches nicht verändert, da durch das Komma die Werthe aller Stellen bestimmt sind. Indem man sodann, wo Divisor und Dividend gleich viele Dezimalstellen haben, das Komma wegläßt, werden Divisor und Dividend durch dieselbe Zahl multiplizirt und der Quotient bleibt folglich unverändert.

Aufgaben zur Uibung.

I. Aufgabe. Man soll die Zahl 1361754,9 durch 3,6954 dividiren.

II. Aufgabe. Der preußische Staat hat eine Bevölkerung von 11543985 Seelen; da nun in diesem Staate auf je 22,02 Menschen in Kriegszeiten ein Mann zu stellen kömmt, so ist die Frage: Wie groß ist Preußens Landmacht im Kriege?

III. Aufgabe. Im ganzen russischen Reiche, welches einen Flächeninhalt von 367471,875 Quadratmeilen hat, kömmt im Durchschnitt auf jeden Bewohner eine Fläche von 0,006189 Quadratmeilen. Frage: Wie groß ist die Bevölkerung des gesammten russischen Reiches?

Auflösungen.

I. Aufgabe. Der Quotient ist 368500.

II. Aufgabe. Preußens Landmacht im Kriege ist 524250 Mann.

III. Aufgabe. Die Bevölkerung des gesammten russischen Reiches ist 59375000.

I. Anhang.

Von den Rechnungsvortheilen bei Anwendung der vier Grundrechnungsarten.

Nachdem wir die Lehre von den vier Grundrechnungsarten wissenschaftlich dargestellt haben, wird es nicht am unrechten Orte seyn, Einiges über die Vortheile zu sagen, deren man sich bei Anwendung derselben zur leichteren und schnelleren Auflösung der Aufgaben bedienen kann. Hierher gehört auch das sogenannte Kopfrechnen.

Das Verfahren, Rechnungsaufgaben ohne Beihilfe äußererer Mittel, bloß in Gedanken aufzulösen, nennt man das Kopfrechnen.

Um eine Fertigkeit im Kopfrechnen zu erlangen, ist es zuerst nothwendig, sich eine möglichst genaue Kenntniß der vier Grundrechnungsarten zu erwerben; denn obgleich es im gemeinen Leben sehr viele Menschen gibt, die ohne alle Begriffe vom Rechnen, ja sogar ohne, wie man zu sagen pflegt, auf dem Papier rechnen zu können, dennoch eine ziemliche Fertigkeit im Kopfrechnen besitzen; so ist doch ihr Wissen hierin nur auf eine gewisse Zahl eingeprägter Rechnungsformeln beschränkt, bei deren mechanischer Anwendung sie leicht in Verwirrung gerathen, ohne doch die Ursache ihres Irrthums einsehen zu können. Dann gibt es aber auch noch gewisse einfache Rechnungsformeln für einzelne Fälle, durch deren Anwendung die Auflösung mancher Aufgaben so erleichtert wird, daß dieselbe ohne Schwierigkeit in bloßen Gedanken vollbracht werden kann.

Da jedoch dieser Gegenstand bereits in zahlreichen Rechnungsbüchern vielfältig und weitläufig behandelt worden ist: so glauben wir denselben hier übergehen zu können.

Wohl aber bleibt zu erinnern, daß häufige Uibung im Kopfrechnen in jeder Hinsicht für die praktische Rechenkunst von großem Vortheile sey, indem bei schriftlicher Auflösung von Rechnungsaufgaben, dadurch, daß man nicht jede Kleinigkeit anzuschreiben und schriftlich auszurechnen braucht, und durch die Anwendung gewisser Rechnungsvortheile bedeutende Ersparniß an Zeit und Mühe bewirkt wird.

Was ferner die Rechnungsvortheile betrifft, so müssen die Regeln derselben einfach und ihre Anwendung leicht seyn, weil sonst durch dieselben keine Ersparniß, weder an Zeit, noch an Mühe bewirkt wird, und daher kein Rechnungsvortheil erfolgt.

Wir theilen deshalb nur eine kurze Uibersicht solcher leichter und einfacher Regeln mit, durch welche ein solcher Vortheil bezweckt wird, mit Hinweglassung aller übrigen, die durch ihre Zusammensetzung und schwierigere Anwendung diesen Vortheil nicht gewähren.

Für die Addition und Subtraktion lassen sich keine besonderen Regeln für eine leichtere und schnellere Anwendung derselben bestimmen.

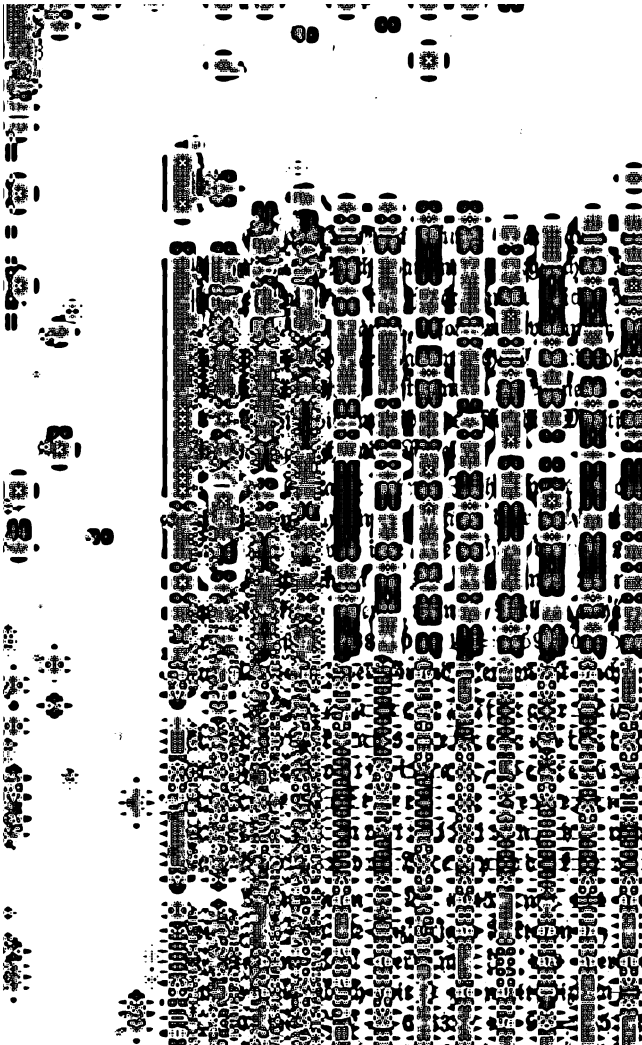
In Betreff der Multiplikation ist es erstens vortheilhaft, nebst dem sogenannten kleinen Einmaleins auch das große oder das Verzeichniß der Produkte von zweiziffrigen Faktoren dem Gedächtnisse einzuprägen, zu welchem Zwecke folgende Tabelle dienen könnte, deren Gebrauch derselbe ist, wie wir ihn bei dem einfachen Einmaleins gezeigt haben. Wenn man nämlich das Produkt zweier Faktoren bestimmen will, so suche man den einen derselben in der Reihe a b und den andern in der Reihe a c; das Fach, in welchem die fortlaufenden Reihen dieser beiden Faktoren zusammentreffen, enthält das Produkt. Z. B.

Man wollte das Produkt von 25 und 18 finden, so suche man in der Reihe a b die Zahl 25, und in der Reihe a c die Zahl 18; fährt man nun in der Ziffernreihe von 25 so weit herab, bis man in die Zeile kömmt, in welcher die Zahl 18 steht, so findet man die Zahl 450 als das Produkt dieser beiden Zahlen.

Das grosse Einmal Eins

von 1 bis 20 Mal 30.

1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
3	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90
4	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120
5	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
6	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180
7	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210
8	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	140
9	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270
10	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
11	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275	286	297	308	319	330
12	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276	288	300	312	324	336	348	360
13	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325	338	351	364	377	390
14	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322	336	350	364	378	392	406	420
15	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360	375	390	405	420	435	450
16	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480
17	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425	442	459	476	493	510
18	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450	468	486	504	522	540
19	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475	494	513	532	551	570
20	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600



die übrigen Zahlen
eln selbst für mehr-
Gedächtnisse einge-
zu dienen, um die
erst die Multiplika-

ation noch folgende

r 25 zu multi-
oder 2 Nullen
der 4.
ltipliziren, so ist es
, und durch 4 divi-
n 6384 × 25 gibt
einzusehen.

iplikator selbst
rigen Faktoren,
in solche ein-
und mit diesen
n auf diese Art
spart.

ultipliziren, so ist es
und 9 zu zerlegen und
rch erhaltene Produkt
nämlich: 38457 × 8
308; denn 38457 ×

ndus nebst einer
ist es gut, sich
zern in Halbe-
, Zweigroschen-

stücke, Eingroschenstücke und die übrigbleibenden Kreuzer zu zerlegen, sodann den Multiplikandus durch 2, 4, 10 oder 20 zu dividiren und die hiedurch entfallenden Quotienten sogleich zu den Gulden, die Reste aber nach ihrem Betrage in Kreuzern zu den Kreuzern zu zählen, wodurch man die Verwandlung der Kreuzer in Gulden erspart. Z. B.

Man sollte berechnen, wieviel 364 Ellen von einer Waare kosten, von welcher die Elle 6 fl. 55 kr. kostet, so könnte dieß auf folgende Art geschehen: 364 Ellen, die Elle zu 6 fl. gerechnet, geben 364 × 6 = 2184 Gulden; um ferner die Kreuzer zu berechnen, kann man sich 55 kr in 30 kr. oder $\frac{1}{2}$ Gulden, 15 kr. oder $\frac{1}{4}$ Gulden, 6 Kreuzer oder ein Zweigroschenstück, 3 Kreuzer oder 1 Eingroschenstück und einen Kreuzer zerlegt denken, denn 30 + 15 + 6 + 3 + 1 = 55. Sodann setze man die Berechnung folgendermaßen fort:

364 Ellen	à	6	fl.	geben	2184 fl.
"	"	" ½	"	"	182 "
"	"	" ¼	"	"	91 "
"	"	" 1	Zweigroschenstück	. .	36 " 24 kr.
"	"	" 1	Eingroschenstück	. . .	18 " 12 "
"	"	" 1	Kreuzer	. . . . .	6 " 4 "
				Summe .	2517 fl. 40 kr.

Denn 364 Ellen zu $\frac{1}{2}$ Gulden geben halb so viel ganze Gulden, und man braucht daher 364 nur durch 2 zu dividiren; 364 Ellen à $\frac{1}{4}$ geben wieder halb so viel ganze Gulden, als vorhin, und man braucht daher nur die zuletzt erhaltene Zahl von Gulden durch 2 zu dividiren; 364 Ellen à 1 Zweigroschenstück geben 36 Gulden und 4 Zweigroschenstücke oder 24 Kreuzer; denn 10 Zweigroschenstücke geben 1 Gulden, und man braucht daher nur 364 durch 10 zu dividiren, oder, was eben so viel ist, links eine Ziffer abzuschneiden, wo dann die übrig bleibenden Ziffern die Gulden, die abgeschnittene Ziffer aber die noch übrigen Zweigroschenstücke bezeichnen; endlich geben 364 Ellen à 1 Eingroschen-

stück wieder halb so viel Gulden und Kreuzer, als vorhin, weßhalb man die vorher erhaltene Anzahl nur durch 2 zu dividiren braucht u. s. w.

4. Enthält der Multiplikandus nebst Klaftern, auch Schuh, Zoll und Linien, oder nebst Centnern auch Pfund, Loth, Quinteln u. s. w. und man soll aus dem Werthe einer Einheit größerer Benennung den Werth der gegebenen Einheiten größerer und kleinerer Benennung bestimmen, so ist es gut, diese Einheiten kleinerer Benennung sich in Bruchform anzuschreiben, hierauf jeden dieser Brüche wieder in lauter solche Brüche aufzulösen, deren Zähler 1 ist, und sodann statt der Multiplikation den Multiplikator durch den jedesmaligen Nenner zu dividiren, oder, was noch vortheilhafter ist, mit dem kleinsten Nenner anzufangen, und den jedesmaligen Quotienten nur durch die Zahl zu dividiren, welche anzeigt, wie vielmal der nächstfolgende Nenner größer ist, als der vorhergehende. Z. B.

Man sollte berechnen, wie hoch eine Mauer von 36 Klafter 5 Schuh 10 Zoll Länge zu stehen kommen würde, wenn die Klafter von dieser Mauer 24 fl. 48 kr. kostet. Um diese Aufgabe mit Vortheil aufzulösen, würde man sich 5′ als $\frac{5^{\circ}}{6}$ und 10″ als $\frac{10^{\circ}}{72}$ anschreiben, sodann $\frac{5}{6}$ in $\frac{2^{\circ}}{6} + \frac{2^{\circ}}{6} + \frac{1^{\circ}}{6} = \frac{1^{\circ}}{3} + \frac{1^{\circ}}{3} + \frac{1}{6}$ auflösen, eben so $\frac{10^{\circ}}{72}$ in $\frac{8^{\circ}}{72} + \frac{2^{\circ}}{72}$ oder $\frac{1^{\circ}}{9} + \frac{1^{\circ}}{36}$ und hierauf folgendermaßen verfahren:

I. Produkt von 36° × 24 fl. 48 kr. nach der vorigen Anweisung, nämlich:

	36 × 24 fl.	864 fl.	
48 kr. = ½ fl. + ¼ fl. + 1 Eingroschenstück			
daher	36 × ½ . . .	18 =	
	36 × ¼ . . .	9 =	
	36 × 1 Eingroschenst.	1 =	48 kr.
II. Produkt 24 fl. 48 kr. × 5′ oder 1/12 .		8 =	16 =
	1/12 .	8 =	16 =
	1/6 .	4 =	8 =
III. Produkt 24 fl. 48 kr. × 10″ oder 1/9 .		2 =	45⅓ =
	1/36 .	=	41⅓ =
		916 fl.	54⅔ kr.

Um nämlich das Produkt 24 fl. 48 kr. × $\frac{1^\circ}{3}$ zu erhalten, dividire man 24 fl. 48 kr. durch 3; um sodann das Produkt von 24 fl. 48 kr. × $\frac{1^\circ}{6}$ zu erhalten, dividire man nur den vorigen Quotienten durch 2, da $\frac{1}{6}$ zweimal kleiner ist, als $\frac{1}{3}$; um ferner das Produkt von 24 fl. 48 kr. mit $\frac{1^\circ}{9}$ zu erhalten, dividire man das von $\frac{1^\circ}{3}$ erhaltene Produkt durch 3, da $\frac{1}{9}$ dreimal kleiner ist, als $\frac{1}{3}$ u. s. w.

Dasselbe gilt auch von Centern, Pfund, Loth u. s. w. Z. B. Man sollte berechnen, wie theuer 8 Ct. 76 Pf. 26 Loth 3 Quint. einer Waare kommen würden, von welcher der Ct. 64 fl. 36 kr. kostet, so würde man, da 76 Pf. = $\frac{76 \text{ Ct.}}{100}$ = $\frac{50 \text{ Ct.}}{100} + \frac{25 \text{ Ct.}}{100} + \frac{1 \text{ Ct.}}{100}$, 26 Loth = $\frac{26 \text{ Ct.}}{3200}$ = $\frac{16 \text{ Ct.}}{3200} + \frac{8 \text{ Ct.}}{3200} + \frac{2 \text{ Ct.}}{3200}$ u. s. w. dieß auf folgende Art berechnen:

I. 64 fl. 36 kr. × 8 Ct. oder 64 fl. × 8 . 512 fl.
30 kr. oder ½ = × 8 . 4 =
und 6 kr. × 8 . 48 kr.

II. 64 fl. 36 kr. × 76 Pf. oder ½ Ct. . . 32 = 18 =
¼ = . . 16 = 9 =
1/100 = ... 38 19/25 kr.

III. 64 fl. 36 kr. × 26 Loth oder 1/200 Ct. . . 19 19/50 =
1/400 = . . . 9 69/100 =
1/1600 = . . . 2 169/400 =

IV. 64 fl. 36 kr. × 3 Qu. oder 1/6400 = ... 969/1600 =
1/12800 = . . . 969/3200 =

566 fl. 26 515/3200 o. 103/640 kr.

Bei diesem Verfahren kömmt es besonders auf die Zweckmäßigkeit der Theile an, die man aus den Brüchen bildet, indem man immer zuerst darauf Rücksicht nehmen muß, daß sich Zähler und Nenner so abkürzen lassen, daß man durch die Abkürzung einen Bruch erhalte, dessen Zähler 1 ist; dann aber auch dahin streben muß, daß die Nenner der einzelnen Theilbrüche wo möglich um das Doppelte oder Dreifache kleiner oder größer seyen, wodurch das Dividiren bedeutend erleichtert wird. So könnte man z. B. 11′′ oder $\frac{11^{\circ}}{72}$ zerlegen in $\frac{9^{\circ}}{72}$ oder $\frac{1^{\circ}}{8}$ und $\frac{2^{\circ}}{72}$ oder $\frac{1^{\circ}}{36}$; allein hier ist $\frac{1}{36}$ kein Theil von $\frac{1}{8}$, und man müßte daher den angegebenen Werth sowohl durch 8 als durch 36 dividiren. Besser würden daher $\frac{11^{\circ}}{72}$ zerlegt werden in $\frac{6^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{12}$ $\frac{3^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{24}$ und $\frac{2^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{36}$, weil man hier den gegebenen Werth nur durch 12 zu dividiren braucht, und dann noch die Hälfte und den dritten Theil des Quotienten nimmt.

5. Soll man eine Zahl mit 9, 99 oder 999 multipliziren, so ist es vortheilhafter, derselben rechts 1, 2 oder 3 Nullen anzuhängen und die gegebene Zahl sodann einmal abzuziehen. Z. B.

Man sollte 38746 mit 99 multipliziren, so würde es vortheilhafter seyn, derselben rechts zwei Nullen

anzuhängen und dieselbe sodann einmal abzuziehen, nämlich:

3874600
38746
3835854

denn 38746 × 99 gibt auch 3835854.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen.

6. Soll eine Zahl mit 98, 998 oder 9998 multiplizirt werden, so ist es vortheilhafter, derselben 2, 3 oder 4 Nullen anzuhängen und das Doppelte der gegebenen Zahl abzuziehen.

Z. B. Statt 78946 mit 998 zu multipliziren, ist es vortheilhafter, 3 Nullen anzuhängen und das Doppelte der gegebenen Zahl abzuziehen; nämlich;

78946000
157892
78788108

7. Soll eine Zahl mit 75 multiplizirt werden, so ist es vortheilhafter, dieselbe mit 3 zu multipliziren, sodann 2 Nullen anzuhängen und durch 4 zu dividiren.

Sollte man z. B. 846932 mit 75 multipliziren, so ist es vortheilhafter, diese Zahl mit 3 zu multipliziren, nämlich 846932 × 3 = 2540796, sodann 2 Nullen anzuhängen und durch 4 zu dividiren, nämlich: 254079600 : 4 = 63519900.

Der Grund dieses Verfahrens liegt darin, weil $\frac{300}{4} = 75$.

Anmerkung. Dergleichen Regeln für einzelne Fälle der Multiplikation kann sich jeder leicht bei einiger Aufmerksamkeit selbst bestimmen, daher wir dieselben um so mehr übergehen, als sie bereits genugsam in zahlreichen praktischen Rechenbüchern behandelt worden sind.

Sollen von einem Produkte nur einige der höchsten Stellen bestimmt werden, so beobachte man folgende Regeln:

a. Man untersuche, ob das Produkt der höch-

sten Stelle des Multiplikators mit dem Multiplikandus einziffrig oder zweiziffrig ist. Im ersten Falle schneide man von dem Multiplikandus von der Rechten gegen die Linke so viele Stellen ab, als im Produkte verlangt werden; im zweiten Falle um 1 weniger.

b. Man setze unter die niedrigste der abgeschnittenen Stellen des Multiplikandus die höchste Stelle des Multiplikators, und die übrigen Stellen des letztern in verkehrter Ordnung von der Rechten gegen die Linke dazu.

c. Man multiplizire hierauf jede Ziffer des Multiplikators mit der darüber stehenden und den links folgenden Ziffern des Multiplikandus und fange die Theilprodukte jedesmal unter der ersten Ziffer des Multiplikators zu schreiben an.

d. Um den Fehler der weggelassenen Ziffern zu verbessern, multiplizire man auch jedesmal die Ziffer im Multiplikandus, welche derjenigen vorangeht, mit der man eben anfangen sollte, suche hierauf die nächst höhere Zahl, deren Einheiten mit 5 besetzt sind, und addire die Zehner derselben zu dem Theilprodukte.

e. Die Theilprodukte addirt geben das verlangte Hauptprodukt. Z. B.

Man sollte von 849376 × 8432 bloß die drei höchsten Stellen bestimmen, so untersuche man zuerst, ob das Produkt der höchsten Ziffern des Multiplikators und Multiplikandus ein- oder zweiziffrig sey. Hier ist es zweiziffrig, denn 8 × 8 = 64, folglich schneidet man nur 2 Stellen im Multiplikandus ab und setzt die Multiplikation so an:

84|9376
2348

Hierauf multiplizirt man 8 mit 9 = 72; die nächst höhere mit 5 anfangende Zahl ist 75, und man zählt folglich zur Verbesserung des Produktes 7 zum nächsten Theilprodukte; nämlich: 4 mal 8 = 32 + 7 = 39, schreibt man 9 an und 3

bleiben; 8 × 8 = 64 und 3 = 67; folglich das erste Theilprodukt 679; 4 × 4 = 16; folglich die nächst höhere mit 5 anfangende Zahl 25, von welcher man 2 zu dem nächsten Theilprodukte zählt, nämlich: 4 × 8 = 32 und 2 ist 34; daher würde die ganze Rechnung so angeschrieben erscheinen:

84|9376
2348
679
34
713

Es würden also 713 die höchsten drei Stellen des zu findenden Produktes seyn; allein durch die Multiplikation ohne Abkürzung sind sie 715. Um daher den Fehler vollkommen zu verbessern, ist es gut, eine Stelle mehr, als verlangt wird, zu nehmen, nämlich:

849|376
2348|
6794
340
25
715|9,

wodurch man diese Stellen genau erhält.

Für die Division mögen folgende Regeln hier angeführt werden:

1. Soll eine Zahl durch 25 dividirt werden, so dividire man nur die zwei letzten Stellen durch 25, multiplizire dagegen die übrigen Stellen mit 4 und addire zu dem Produkte den zuerst gefundenen Quotienten. Z. B.

Man sollte 8493775 durch 25 dividiren, so könnte dieß vortheilhafter vollbracht werden, indem man nur die zwei letzten Stellen 75, durch 25 dividirt, nämlich: 75 : 25 = 3; sodann die übrigen Stellen mit 4 multiplizirt und den Quotienten dazu addirt; nämlich: 84937 × 4 = 339748 + 3 = 339751; denn 8493775 : 25 gibt auch 339751.

Der Grund dieses Verfahrens ist folgender: Indem man der gegebenen Zahl rechts zwei Stellen wegnimmt, wird sie mit Ausnahme dieser zwei Stellen durch 100 dividirt, und man muß sie daher mit 4 multiplizieren, damit sie nur durch 25 dividirt

werde; indem man nun auch noch die letzten 2 Stellen durch 25 dividirt und den Quotienten zum vorigen addirt, wird die ganze Zahl durch 25 dividirt.

2. Soll eine Zahl durch 9 dividirt werden, so hänge man derselben rechts eine Nulle an, addire hierauf die einzelnen Ziffern der gegebenen Zahl ohne Rücksicht auf ihre Stellenwerthe so oft, als Stellen in der gegebenen Zahl sind, wobei man die jedesmalige Summe wie bei einer gewöhnlichen Addition von der Rechten gegen die Linke anschreibt und bei der jedesmaligen Addition eine Ziffer ebenfalls von der Rechten gegen die Linke wegläßt. Schneidet man endlich von der ganzen Summe drei Stellen ab, so gibt der Uiberrest den Quotienten, die höchste von der abgeschnittenen Stellen aber den Zähler für die allenfalls übrigbleibenden Bruchtheile. Z. B.

Man sollte die Zahl 84639765 durch 9 dividiren, so könnte dieß mit Vortheil auf folgende Art geschehen: Man hänge zuerst eine Nulle an, nämlich: 846397650, und addire die Ziffern ohne Rücksicht auf ihre Stellenwerthe, so gibt die Summe 48; davon schreibe man 8 an die niedrigste Stelle, und addire wieder die Ziffern ohne Stellenwerthe, wobei man jedoch die niedrigste Stelle, nämlich die Nulle, wegläßt: die Summe gibt 48 und sammt dem vorhin verbliebenen Reste 4, die Summe 52; von dieser schreibe man 2 an die Stelle der Zehner, den Rest 5 aber addire man wieder zum folgenden, wobei man jedoch wieder eine Stelle, nämlich 5, wegläßt; die Summe gibt 48; von dieser wird 8 an die Stelle der Hundertel gesetzt, 4 aber zum folgenden gezählt, wobei man wieder eine Stelle, nämlich 6, wegläßt. So erhält man endlich die Summe 9404418328, welche, wenn man ihr 3 Stellen rechts abschneidet, die Zahl 9404418 als Quotienten und die höchste der abgeschnittenen Stellen, nämlich 3 als Zähler für den übrig bleibenden Bruchtheil $\frac{3}{9}$, und folglich $9404418\frac{3}{9}$ als ganzen Quotienten gibt, denn $84639765 : 9 = 9404418\frac{3}{9}$.

Der Grund dieses Verfahrens ist folgender: Würde man einer Zahl, statt dieselbe durch 9 zu dividiren, rechts eine Stelle abschneiden, so würde dieselbe, statt durch 9, durch 10 dividirt und noch um den Werth der abgeschnittenen Ziffer verkleinert werden, und man erhielte folglich einen mehr als $\frac{1}{90}$ mal kleinern Quotienten. Dieß geschieht nun hier, indem man zwar der gegebenen Zahl 2 Nullen anhängt, dagegen 3 Stellen abschneidet.

Um daher diesen Fehler wieder gut zu machen, addirt man von jeder Stelle der gegebenen Zahl den zehnten, hundertsten, tausendsten Theil derselben u. s. w. dazu, welches durch die oben angedeutete Art des Verfahrens bewirkt wird, denn die obige Addition angeschrieben, würde so erscheinen:

8888888888
444444444
66666666
3333333
999999
77777
6666
555
00
0

9401418|328

3. Soll eine Zahl durch 99 dividirt werden, so hänge man derselben 2 Nullen an, addire die Ziffern wieder nach der im vorigen Falle angegebenen Anleitung, jedoch mit dem Unterschiede, daß man bei der jedesmaligen Addition immer eine Stelle überspringt, so gibt die Summe, nachdem man 4 Stellen von derselben abgeschnitten hat, den Quotienten, die zwei höchsten abgeschnittenen Stellen aber den Zähler für den allenfalsigen Bruchtheil. Oder, was eben so viel ist, man hänge der gegebenen Zahl 2 Nullen an, schreibe hierauf diese ganze Zahl, jedoch allemal mit Weglassung der zwey niedrigsten Stellen, unter die-

selbe so oft an, als es angeht, und addire diese Zahlen, so gibt die Summe mit Weglassung der 4 niedrigsten Stellen den Quotienten, die zwey höchsten Stellen des abgeschnittenen Theiles aber den Zähler für den allenfalsigen Bruch. Z. B.

Man sollte 19843768 durch 99 dividiren, so könnte dieß mit Vortheil auf folgende Art vollbracht werden. Man hänge der gegebenen Zahl 2 Nullen an, nämlich 1984376800, und addire hierauf in folgender Ordnung: Null und 8 sind 8, und 7 sind 15, und 4 sind 19, und 9 sind 28 (wobey man immer eine Stelle weggelassen hat); von dieser Summe wird 8 angeschrieben, 2 aber zur folgenden Theilsumme gezählt, nämlich: 2 und 0 sind 2, und 6 sind 8, und 3 sind 11, und 8 sind 19, und 1 sind 20; hievon Null angeschrieben und 2 zugezählt u. s. w. So erhält man die Summe 2004421008, welche, nachdem man die 4 niedrigsten Stellen abgeschnitten hat, 200442 als Quotienten, und die zwey höchsten der abgeschnittenen Stellen als Bruchtheil, nämlich $\frac{10}{99}$ gibt. Oder man schreibe die Addition folgendermaßen an:

1984376800
19843768
198437
1984
19
2004420008

Folglich ist der Quotient 200442 $\frac{10}{99}$; denn 19843768 : 99 = 200442 $\frac{10}{99}$.

Der Grund ist derselbe wie vorhin.

4. Soll eine Zahl durch 999 dividirt werden, so hänge man derselben 2 Nullen an, addire dieselbe wieder nach der vorhin gegebenen Anleitung, jedoch mit dem Unterschiede, daß man immer statt einer Stelle, wie vorhin, zwey Stellen beym Addiren überspringt, so gibt die Summe, nachdem man 5 Stellen abgeschnitten hat, den Quotienten,

die höchsten der drey abgeschnittenen Stellen aber den Zähler für den allenfalsigen Bruchtheil. Oder: Man schreibe die Zahl mit Hinweglassung der drey niedrigsten Stellen so oft unter dieselbe, als es angeht, und addire dieselbe, so gibt die Summe dasselbe Resultat.

Z. B. Man sollte die Zahl 347897634 durch 999 dividiren, so setze man 2 Nullen zu derselben, addire sie nach der gegebenen Anleitung, und die Summe 34824587986 gibt mit Ausnahme der fünf letzten Stellen den Quotienten 348245, und die drei höchsten der abgeschnittenen Ziffern den Bruchtheil $\frac{879}{999}$. Oder man setze die Addition folgender Maßen an:

34789763400
34789763
34789
34
34824587987, was dasselbe Resultat gibt.

5. Statt eine Zahl durch 50 zu dividiren, dividire man nur die zwey letzten Stellen durch 5, schreibe den allenfalsigen Rest als Zähler des Bruchtheiles an, und multiplizire die übrigen Stellen mit 2, wozu man auch den durch die vorige Division erhaltenen Quotienten zählt.

Z. B. Sollte man die Zahl 38497656 durch 50 dividiren, so dividire man nur 56 durch 50, schreibe den Rest 6 als Bruchtheil, nämlich $\frac{6}{50}$ an, und multipllzire die übrigen Ziffern durch, wozu man auch den vorhin erhaltenen Quotienten 1 zählt; so erhält man 769953 $\frac{6}{50}$ als Quotienten; denn $38497656 : 50 = 769953\frac{6}{50}$.

Der Grund ist derselbe, wie bei der Division durch 25.

6. Ist der Divisor eine mehrziffrige Zahl, welche sich leicht in einziffrige Faktoren auflösen läßt, so ist es oft vortheilhaft, denselben in solche einziffrige Faktoren aufzulösen, und die gegebene Zahl durch einen derselben und den

Quotienten immer wieder durch einen derselben zu dividiren, bis man durch alle Faktoren dividirt hat.

Z. B. Man sollte die Zahl 2339100 durch 45 dividiren, so ist es vortheilhafter, den Divisor 45 in die Faktoren 9 und 5 aufzulösen, und zuerst die gegebene Zahl durch 5 zu dividiren, nämlich 2339100 : 5 = 467820 und dann den Quotienten wieder durch 9 zu theilen, nämlich 467820 : 9 = 51980.

Der Vortheil, den man auf diese Art erlangt, besteht darin, daß man die jedesmaligen Produkte des Divisors und Quotienten nicht besonders anzuschreiben braucht, da sie leicht in bloßen Gedanken abgezogen werden können, und diese zweimalige Division durch einziffrige Faktoren nicht so viele Zeit erfordert, als die einmalige Theilung durch einen zweyziffrigen Divisor.

Und so könnten der Regeln für eine vortheilhaftere Ausübung der Division bey einzelnen Fällen noch mehrere angeführt werden. Da jedoch theils ihre Anwendung zu wenig allgemein, und das Einüben der bisweilen sehr zusammengesetzten Regeln eben deßwegen wenig nutzbringend ist, theils auch die Erklärung derselben in zahlreichen praktischen Lehrbüchern zu finden ist, so wollen wir dieselben, als dem Zwecke dieses Lehrbuches nicht entsprechend, übergehen.

7. Sollen bey einer Division bloß einige der höchsten Stellen des Quotienten gefunden werden, so beobachte man folgende Regeln:

a. Man schneide im Divisor so viel Stellen von der Linken gegen die Rechte ab, als der Quotient enthalten soll. Hat der Divisor zu wenig Ziffern, so dividire man zuerst noch so vielmal nach der gewöhnlichen Division, als der Divisor zu wenig Ziffern hat.

b. Man dividire hierauf wie gewöhnlich, setze aber zu dem Reste keine Stelle mehr herab, sondern vermindere den Divisor immer um eine Stelle, und dividire so lange fort, bis alle Stellen im Divisor abgestrichen sind.

c. Um den durch das Hinweglassen der übrigen Stellen verursachten Fehler zu verbessern,

multiplizire man auch die zunächst abgestrichene Stelle des Divisors mit dem zuletzt gefundenen Quotienten, und zähle die Zehner der zunächst höheren mit 15 anfangenden Zahl zu dem abzuziehenden Theilprodukt.

Z. B. Man sollte bey der Division 846937286 : 47893 nur die zwey höchsten Stellen des Quotienten finden, so dividire man nur mit 47, nämlich: 47 in 48 ist 1mal enthalten, nun multiplizire man aber auch die vorhergehende Stelle des Divisors mit 1, nämlich 1 × 8 = 8, suche die nächste mit 5 anfangende Zahl, nämlich 15 und addire die Zehner, nämlich 1 zu dem folgenden Theilprodukte, nämlich: 1 × 47 = 47 und 1 = 48; 48 von 84 bleiben 36; diesen Rest dividire man jetzt durch 4, nämlich 36 : 4 = 9, multiplizire 9 auch mit der vorhergehenden Ziffer des Divisors 7 × 9 = 63 und zähle die Zehner von 65 als der nächst höhern mit 15 anfangenden Zahl zu dem Theilprodukte, nämlich 4 × 9 = 36 und 6 = 42; folglich ist der Quotient 9 zu groß und 8 der wahre Quotient. Es sind also die 2 höchsten Stellen des Quotienten 18.

II. Anhang.

Aufgaben zur Uibung über die vorgetragenen Rechnungsarten.

1. Aufgabe. Die Anzahl der Häuser von London, Constantinopel, Lissabon, Rom, Neapel, Palermo, Paris und Amsterdam, als der größten Städte Europa's, ist so groß, daß, wenn man aus denselben eine einzige Gasse von zwey Häuserreihen bilden wollte, und jedes Haus im Durchschnitt 40 3' breit annimmt, hiedurch eine Gasse von 234 Meilen Länge, also ziemlich genau von Wien bis Orleans in Frankreich gebildet werden könnte. Und wenn man jedes Stück der Gasse nach den Häusern der Stadt, aus der diese genommen wurden, benennen möchte, so würde diese Gasse in einer Länge von 70,875 Meilen ungefähr von Wien bis Augsburg die Londoner Gasse; hierauf in einer Länge von 45 Meilen, also ungefähr von Augsburg bis Freyburg die Gasse von Constantinopel; in einer Länge von 24,75 Meilen die Gasse von Lissabon; hierauf 22,5 Meilen die Gasse von Neapel; 20,25 Meilen die Gasse von Rom; 19,9125 Meilen die Gasse von Palermo; sodann in einer Länge von 15,4125 Meilen die Gasse von Paris; endlich in einer Länge von 15,3 Meilen die Gasse von Amsterdam heißen. Frage: Wie groß ist die Zahl der Häuser von London, Constantinopel, Lissabon, Neapel, Rom, Palermo, Paris und Amsterdam?

2. Aufgabe. Auf die Frage, unter welchem Grade der Länge und Breite die Stadt Prag liege, antwortete Jemand: Die Summe der Grade von der geographischen Länge und Breite Prag's ist 82; davon gibt der 2,5625ste Theil die Grade für die Länge. Frage: Welches ist die geographische Länge und Breite Prags?

3. Aufgabe. Ein Geflügelhändler hat eine Heerde junger Gänse, für welche er sogleich 180 fl. lösen könnte. Allein er will dieselben lieber noch einige Monate in der Fütterung behalten und dann wohl gemästet in einem höhern Preise verkaufen. Nach Verlauf dieser Zeit verkauft er dieselben nun wirklich um 234 fl.

40 kr.; allein da ihm das Futter während dieser Zeit 26 fl. gekostet hat, so gewinnt er für die Fütterungszeit an jeder Gans nur $21\frac{1}{2}$ kr. Frage: Wieviel Gänse enthielt die Heerde?

4. Aufgabe. Im Jahre 1829 hatten Teplitz, Karlsbad, Marienbad und Franzensbrunn zusammen 16347 Kurgäste. Von diesen hatte Marienbad 552 mehr als Franzensbrunn, Karlsbad 1904 mehr als Marienbad und Franzensbrunn zusammen, Teplitz endlich 553 mehr, als die drey erstern zusammen. Frage: Wie viel Kurgäste hatten Teplitz, Karlsbad, Marienbad und Franzensbrunn im Jahre 1829?

5. Aufgabe. Ein Bauer hat $16\frac{3}{4}$ Strich Feldbau, auf jeden Strich Feldes braucht er $1\frac{1}{4}$ Strich Getreide zur Aussaat, für das Ackern und Säen verpflichtet er sich, den Arbeitern den 10. Theil, und für das Schneiden und Dreschen den 8. Theil seiner Erndte zu geben. Da er nun $9\frac{1}{2}$ mal so viel geerndtet hat, als er gesäet hatte, so frägt es sich: Wie groß wird der Antheil der Arbeiter und wie groß der seinige an der Erndte seyn?

6. Aufgabe. Der Flächeninhalt sämmtlicher deutscher Bundesstaaten beträgt 11496 geographische Meilen. Davon enthalten die deutsch-österreichischen Staaten den $\frac{145}{479}$ Theil; Bayern kömmt dem $\frac{25}{58}$sten Theile der deutsch-österreichischen Länder gleich; Sachsen dem $\frac{33}{500}$ten Theile Bayerns, Nassau dem $\frac{10}{21}$sten Theile von Sachsen; Waldeck dem $\frac{7}{20}$sten Theile von Nassau, und Lichtenstein dem $\frac{5}{42}$sten von Waldeck. Frage: Wie groß ist der geographische Flächeninhalt von den deutsch-österreichischen Ländern, Bayern, Sachsen, Nassau, Waldeck und Lichtenstein?

7. Aufgabe. Wenn man annimmt, daß der Umfang des Zifferblattes bei einer Taschenuhr 7 Zoll beträgt, daß der Minutenzeiger diesen Weg in einer Stunde zurücklegt, und daß eine gute Taschenuhr bis 50 Jahre im Gange erhalten werden kann, so frägt es sich: Wie groß ist der Weg, den ein solcher Minutenzeiger in 50. Jahren, das Jahr zu 360 Tagen gerechnet, zurücklegt?

8. Aufgabe. Da Böhmens Hauptstadt Prag unter dem 50 Grad der nördlichen Breite liegt, und unter dieser Breite jeder Grad des Parallelkreises 9,642 geographische Meilen beträgt, so frägt es sich: Wie groß ist der Weg, den diese Stadt durch die

tägliche Umdrehung der Erde in jedem Tage, in jeder Stunde und in jeder Minute zurück legt?

9. Aufgabe. Ein Teich von 4 Strich Aussaat, welcher alle 2 Jahre gefischt werden kann, und im Durchschnitt bey der jedesmaligen Fischerey einen Nutzertrag von 260 Gulden gibt, soll ganz abgelassen und in eine Wiese verwandelt werden. Wenn man nun annimmt, daß 1 Strich Wiese im Durchschnitt 18 Zentner Heu, den Zentner zu 3 fl. 20 kr. gibt, so frägt es sich: Wie groß wird in 10 Jahren der Nutzen oder Schaden dieser Abänderung seyn.

10. Aufgabe. Als Jemand gefragt wurde, wie hoch die Schneekoppe im Riesengebirge sey, so antwortete derselbe: Wenn man die Höhe des Georgiberges, dann des Donnerberges, der 197 Wiener Klafter höher ist, als der vorige, und des Haydelberges im Böhmerwalde, der wieder um 315 Klafter höher ist, als der Donnerberg, addirt, sodann von 1399, als der Summe ihrer Höhen, die Höhe des zweyten sammt der halben Höhe des ersten subtrahirt, so erhält man eine Zahl, welche noch um 9 größer ist, als die Höhe der Schneekoppe. Frage: Welches ist die Höhe der Schneekoppe?

11. Aufgabe. Ein Feld von 120° Länge und 112° Breite soll in einen Obstgarten verwandelt werden. Da nun die Bäume sowohl der Breite als der Länge nach 2 Klafter weit von einander gesetzt werden sollen, so frägt es sich: Wie viel Obstbäume wird man brauchen?

12. Aufgabe. Die Republik San Marino ist in Europa der kleinste, und Rußland der größte Staat. Nimmt man den Flächeninhalt des ganzen russischen Reiches mit 367493,52 Quadratmeilen an, so könnte man 346692 solche Republiken daraus machen. Frage: Wie groß ist der Flächeninhalt der Republik San Marino?

13. Aufgabe. Wenn man die Jahreszahl 1831 um ihren 5., 20., 40. und 80. Theil vermindert, so erhält man eine Zahl, welche noch um 4,5875 größer ist, als die Zahl des Jahres, in welchem das erste Papier von Lumpen bereitet wurde. Frage: In welchem Jahre wurde das erste Papier von Lumpen bereitet?

14. Aufgabe. Ein Mann hinterläßt ein bedeutendes Vermögen mit der Anordnung, daß seine Frau die Hälfte des ganzen

Vermögens, seine Tochter von der andern Hälfte zwey Drittheile, von dem Ueberreste aber sein Haushofmeister 8000, sein Kammerdiener 6000, der Koch 5000, jeder der zwey Bedienten 3000, so wie jeder endlich der drey Kutscher 2000 bekommen sollte. Frage: Wie groß war das ganze Vermögen und die Antheile jedes Einzelnen?

15. Aufgabe. Der Flächeninhalt sämmtlicher Länder auf unserer Erde beträgt 2405112 geographische Meilen. Davon nimmt Europa, als der kleinste, den $^{38509}/_{601278}$sten Theil; Australien den $^{81419}/_{1202556}$sten; Afrika den $^{21795}/_{100213}$ten; Amerika den $^{31747}/_{100213}$ten und Asien den $^{401615}/_{1202556}$sten Theil ein. Frage: Wie groß ist der Flächeninhalt eines jeden dieser Welttheile?

16. Aufgabe. Der Bischof von Catanea bezieht durch den Verkauf des Schnees vom Berge Aetna ein jährliches Einkommen von 6000 sicilianischen Thalern (den Thaler zu 1 fl. 56 kr. gerechnet). Da nun das Pfund davon im Durchschnitt 6 kr. kostet, so frägt er sich: Wie viel Pfund Schnee werden jährlich vom Aetna verkauft?

17. Aufgabe. Jemand braucht zu einem Baue 8 Stämme Bauholz. Da nun jeder Stamm im Walde 6 fl. 36 kr. kostet, bey jedem für das Fällen und Behauen drey Arbeiter durch zwey Tage mit 24 kr. täglich, und für die Zufuhr eines jeden auf die Entfernung von $3\frac{1}{2}$ Meile 1 fl. 48 kr. für jede Meile bezahlt werden, so frägt es sich: Was werden diese 8 Stämme bis an Ort und Stelle kosten?

18. Aufgabe. Im Jahre 1829 beschäftigten sich in Böhmen 4542 Menschen mit Erzeugung von Glasflüssen, Compositionssteinen und Glasperlen. Davon waren der $^{34}/_{2271}$ste Theil Glasbrucker; der $^{344}/_{757}$ste Theil Glas- und Compositionsschleifer; der $^{280}/_{757}$ste Theil Perlenschleifer; der $^{25}/_{757}$ste Theil Perlenblaser, der $^{263}/_{2271}$ste Theil Perlenanreiher; der $^{7}/_{757}$ste Theil Perlenvergolder und der $^{2}/_{757}$ste Theil Compositionsbrenner. Frage: Wie viel Menschen waren mit jeder dieser verschiedenen Glasarbeiten beschäftigt?

19. Aufgabe. Wie viel Ziffern muß der Quotient haben, wenn der Divisor 4, der Dividend 13, und der erste Theildividend 5 Ziffern hat?

20. Aufgabe. Wie lang müßte der Faden seyn, dessen

man bedürfte, um eine Elle Leinwand von $1\frac{1}{2}$ Elle Breite zu weben, wenn man auf jeden Zoll sowohl der Länge als der Breite nach 75 Fäden rechnet?

21. Aufgabe. Im Jahre 1829 hatte Böhmen eine solche Menge kunstmäßig gebaute Straßen, daß, wenn ein Fußgänger, der täglich 10 Stunden geht, und jede Stunde 5000 Schritte macht, von welchen 10000 auf eine Meile gehen, dieselben bereisen wollte, 73,740825 Tage zu gehen hätte. Frage: Wie viel Klafter und Meilen betrugen Böhmens sämmtliche Kunststraßen in diesem Jahre?

22. Aufgabe. Wenn die Pest und Hungersnoth, welche im Jahre 1771 und 1772 Böhmen entvölkerte, noch 16,56 Jahre gedauert hätte, so würde die ganze Bevölkerung Böhmens, welche damals 2320000 Seelen betrug, dahin gerafft worden seyn. Frage: Wie viel Menschen haben in dieser zweyjährigen Pest und Hungersnoth in Böhmen ihr Leben eingebüßt?

23. Aufgabe. In London werden so viele Steinkohlen verbraucht, daß im Durchschnitt auf jede Stunde des Tages $5445\frac{15}{73}$ Centner kommen. Frage: Wie viel Centner Steinkohlen verbraucht London jährlich, das Jahr zu 365 Tagen gerechnet?

24. Aufgabe. Es soll ein Obstgarten von 240° Länge und 150° Breite angelegt werden. Da nun die Bäume drey Klafter weit von einander gesetzt werden sollen, das Schock solcher junger Bäume bis an Ort und Stelle 8 fl. 42 kr.; das Graben der Löcher und das Versetzen derselben für jeden Baum $1\frac{1}{2}$ kr. und das Schock von den zum Festbinden derselben nöthigen Pfählen 2 fl. 48 kr. kostet, so frägt es sich: Wie hoch wird der Ankauf der Bäume und Pfähle, wie hoch der Arbeitslohn und wie hoch die ganze Anlage des Obstgartens kommen?

25. Aufgabe. Wien ist von Peking, der Hauptstadt im chinesischen Reiche, so weit entfernt, daß ein Fußgänger, welcher täglich 8 Stunden geht, in jeder Sekunde einen Schritt macht, und mit je fünf Schritten einen Weg von 2 Klaftern zurücklegt, von welchen 4000 auf eine Meile gehen, 1 Jahr (zu 365 Tagen gerechnet) 16 Tage, 7 Stunden, 33 Minuten und 20 Sekunden brauchen würde. Frage: Wie weit ist Wien von Peking entfernt?

26. Aufgabe. Die königliche Druckerey in Paris ist eine der großartigsten Anstalten dieser Art. Sie besitzt 120 Handpressen und 6 Maschinenpressen. Jede Handpresse kann täglich 3000 Bogen auf einer Seite und folglich zwey Handpressen täg= 3000 Bogen auf beiden Seiten liefern; von den Maschinenpressen liefern 5, jede täglich 14000 Bogen auf beyden Seiten, und die sechste 28000 Bogen auf beyden Seiten. Frage: Wie viel Druckbogen, und wie viel Bände, jeden Band zu 40 Bogen gerechnet, kann diese Druckerey täglich, und wie viel in einem Jahre von 365 Tagen liefern?

27. Aufgabe. Als Jemand gefragt wurde, in welcher Münze sein Geldbetrag bestehe, antwortete er: Ich habe um 20 fl. Zweygroschenstücke, Eingroschenstücke und Kreuzer. Die Kreuzer und Eingroschenstücke machen zusammen zwey Gulden mehr aus, als die Zweygroschenstücke; und die Zweygroschenstücke mit den Kreuzern betragen zusammen dreymal so viel, als die Eingroschenstücke für sich. Frage: Wie viel Zweygroschenstücke, Eingroschenstücke und Kreuzer hatte dieser Mensch?

28. Aufgabe. Den 17. November 1828 um 4 Uhr Nachmittags starb ein Mann in einem Alter von 36 Jahren, 5 Monaten und 12 Tagen. Frage: Wann war dieser Mann geboren?

29. Aufgabe. Sechs Strich Feld sind mit Korn besäet worden. Wenn nun ein Strich Feld 15 Mändeln Garben; eine Mandel $\frac{7}{8}$ Strich Getreide, 1 Strich Getreide $\frac{3}{4}$ Strich Mehl gibt, und der Strich Mehl mit 12 fl. 30 kr. bezahlt wird, so frägt es sich: Wie groß wird der Ertrag dieses Feldes im Gelde seyn?

30. Aufgabe. Im Jahre 1828 wurden 1056 Centner 61,35 Pfund Eyer aus Böhmen auf der Elbe in's Ausland verführt. Da nun ein Ey im Durchschnitt 2,4 Loth wiegt, so frägt es sich: Wie viel Eyer wurden im Jahre 1828 auf der Elbe aus Böhmen in's Ausland verführt?

31. Aufgabe. In der Belagerung Prag's durch die Preußen im Jahre 1757 wurde diese Stadt so heftig beschossen, daß vom 7. May bis 19 Juny, als der 40tägigen Dauer dieser Belagerung, im Durchschnitt in je $2^{218}/_{371}$ Minuten eine Bombe, in je $^{720}/_{733}$ Minute eine Kanonenkugel, und in je $106^{2}/_{3}$ Minute

eine Carcasse gegen dieselbe abgeschossen wurde. Frage: Wie viel Bomben, Kanonenkugeln und Carcassen sind in dieser Belagerung gegen die Stadt geschossen worden?

32. Aufgabe. Eine Familie verbraucht im Durchschnitt täglich 6 Loth Kaffee. Da nun das Pfund 1 fl. 12 kr. kostet, so frägt es sich: Wie hoch belaufen sich die Kosten für den Verbrauch desselben in einem Jahre (zu 365 Tagen gerechnet)?

33. Aufgabe. Auf die Frage, welches die größte Länge und Breite Böhmens in Rücksicht seiner geographischen Ausdehnung sey, gab Jemand zur Antwort: Wenn man zu 79,5 Quadratmeilen, als der Summe beyder, 2,2 addirt, und das Ganze durch 1,9 dividirt, so erhält man Böhmens größte Breite von Süden gegen Norden. Frage: Welches ist Böhmens größte Länge und Breite?

34. Aufgabe. Auf die Frage, wie weit Lissabon von Constantinopel entfernt sey, antwortete Jemand: Auf meiner Reise von Constantinopel nach Lissabon legte ich täglich 10 Meilen zurück, brauchte täglich im Durchschnitt zur Bestreitung der Reisekosten 8 fl. 36 kr., und so kostete mich die ganze Reise 791 fl. 12 kr. Frage: Wie viel Meilen ist Lissabon von Constantinopel entfernt?

35. Aufgabe. Jemand hat von seinem zwanzigsten bis zu seinem sechzigsten Jahre (das Jahr zu 360 Tagen gerechnet), im Durchschnitt täglich ½ Pfund Rindfleisch, jeden dritten Tag ¾ Pfund Kalbfleisch, jeden sechsten Tag ein Hühnchen, jeden neunten Tag eine Taube und jeden zwölften Tag ¼ Gans gegessen. Wenn man nun im Durchschnitt 160 Pfund Fleisch auf einen Ochsen und 40 Pfund auf ein Kalb rechnet, so frägt es sich: Eine wie große Heerde von Ochsen, Kälbern, Hühnern, Tauben und Gänsen hat derselbe während dieser Zeit verbraucht?

36. Aufgabe. Wenn Rußland bei seinem gegenwärtigen Flächeninhalte von 367493,02 Quadratmeilen eben so bevölkert wäre, wie verhältnißmäßig der österreichische Kaiserstaat, so würde die Bevölkerung Rußlands noch um 4476899 Menschen stärker seyn, als die Bevölkerung aller fünf Welttheile zusammen, die man gegenwärtig auf 895,881000 rechnet. Frage: Wie groß ist die Bevölkerung des österreichischen Kaiserstaates auf einer Quadratmeile?

37. Aufgabe. Wenn man von der Jahrszahl 1831 die Zahl 20,5 subtrahirt, den Rest durch 15 dividirt, zum Quotienten 212,3 addirt und die Summe mit 3 multiplizirt, so erhält man die Zahl des Jahres, in welchem die Windmühlen erfunden worden sind. Frage: In welchem Jahre sind die Windmühlen erfunden worden?

38. Aufgabe. In einer Baumschule, in welcher sich immer 2000 Setzlinge befinden, und aus welcher nur zweyjährige Bäumchen verkauft werden sollen, und der Abgang sogleich wieder durch neue Setzlinge ergänzt werden soll, stehen am Schlusse des sechsten Jahres 125 sechsjährige, 215 vierjährige und 480 zweyjährige Bäumchen. Frage: Wie viel zweyjährige Setzlinge sind in den einzelnen Jahren aus dieser Baumschule verkauft worden?

39. Aufgabe. Wie hoch wird eine Mauer von 12° 5′ 9″ zu stehen kommen, wenn man für die Länge einer Klafter 16 fl. 48 kr. 3 Pf. zahlen muß?

40. Aufgabe. Die Bevölkerung Wien's betrug im Jahre 1825 überhaupt 281760 Personen. Davon waren $^{278}/_{1761}$ fremde, $^{5}/_{1761}$ Geistliche, $^{647}/_{46960}$ Adeliche männlichen Geschlechts und $^{1143}/_{93920}$ Beamte. Der Uiberrest waren Bürger und sonstige Einwohner. Frage: Wie viel Fremde, Geistliche, Adeliche männlichen Geschlechtes, Beamte und endlich wie viel Bürger und sonstige Bewohner zählte Wien im Jahre 1825?

41. Aufgabe. Ein Bauer besitzt 120 Metzen Felder. Von diesen läßt er den dritten Theil Brache und bebaut von dem Uiberreste die Hälfte mit Gerste, den 4. Theil mit Korn, den 8. Theil mit Weitzen, den 10. Theil mit Hafer und den Uiberrest mit Linsen. Da nun der Weitzen das zwölffache, das Korn das zehnfache, die Gerste das neunfache und der Hafer das achtfache Korn trug, und die Linsen sich um das zehnfache vermehrten; da ferner ein Metzen Weitzen im Durchschnitt 1306000 Körner, ein Metzen Korn 1750000, ein Metzen Gerste 1032000, ein Metzen Hafer 824000 und ein Metzen Linsen 828000 Körner faßt, so frägt es sich: Wie viel Körner Weitzen, Korn, Gerste, Hafer und Linsen, und wie viel Körner überhaupt hat dieser Bauer geerndtet?

42. Aufgabe. Archangel liegt unter dem 56°, Rom aber unter dem 41° nördlicher Breite. Da nun bey Archangel

ein Grad der Länge 8,388, bey Rom aber 11,321 geographische Meilen beträgt, so frägt es sich: In wie viel Sekunden legt Rom und Archangel eine Meile von dem Wege zurück, den sie durch die tägliche Umdrehung der Erde beschreiben?

43. Aufgabe. Die Stadt New-York, welche im Jahre 1783 nur 26000 Einwohner zählte, hatte deren im Jahre 1831 schon 212000. Frage: Wie groß ist im Durchschnitt die jährliche Zunahme ihrer Bevölkerung während dieses Zeitraumes?

44. Aufgabe. Eine Ziegelbrennerey liefert bey jedem Brande 50000 Ziegeln. Da man nun auf je 1000 Ziegeln 0,2 Klafter hartes und 0,5 Klafter weiches Holz rechnet, da ferner zum Einführen der Ziegeln in den Ziegelofen 4 Tage, zum Brennen 12 Tage, zum Auskühlen 4 und zum Ausführen der Ziegeln wieder 4 Tage erfordert werden, so frägt es sich: Wie oft kann man in dieser Ziegelbrennerey in einem Jahre, das Jahr zu 360 Tagen gerechnet, brennen; wie viel kann dieselbe in einem Jahre, Ziegeln liefern, und wie viel Klafter weiches und hartes Holz verbraucht sie jährlich?

45. Aufgabe. Es ist bekannt, daß man im Durchschnitt von 16 ausgewachsenen Gänsen 1 Pfund Bettfedern erhalte. Es frägt sich daher: Wie viel Gänse werden erfordert, um zu einem Hospitale von 1000 Betten, jedes aus einem Unterbette von 3 Pf., einem Oberbette von $2\frac{1}{2}$ Pfund und zwey Kopfkissen, jedes von $1\frac{1}{4}$ Pfund Federn bestehend, die nöthigen Bettfedern zu erhalten?

46. Aufgabe. Auf die Frage, wann das erste Kaffeehaus in Europa errichtet worden sey, antwortete Jemand: Wenn das erste Kaffeehaus, welches zu Constantinopel errichtet wurde, seit seiner Errichtung bis anschlüssig zum heurigen Jahre bestanden wäre, täglich im Durchschnitt nur 200 Gäste gehabt, jeder Gast nur zwey Schalen Kaffee genossen und man auf je 4 Schalen 3 Loth Kaffee gebraucht hätte; so würden bis zum Schlusse des Jahres 1831 9581 Ct. 25 Pfund Kaffee in demselben verbraucht worden seyn. Frage: In welchem Jahre (das Jahr zu 365 Tagen gerechnet) ist das erste Kaffeehaus in Europa errichtet worden?

47. Aufgabe. Ein Handelsmann übernimmt 1000 Ellen einer Modewaare zum Verkauf, die Elle zu 2 fl. 45 kr. Da er nun Anfangs den vierten Theil dieser Waare die Elle um das

Doppelte des Einkaufspreises, später aber von dem Reste das erste Drittheil nur um den Einkaufspreis, dann als die Mode in Abnahme war, das zweyte Drittheil um die Hälfte des Einkaufspreises, das letzte Drittheil endlich nur noch um den vierten Theil des Einkaufspreises absetzte, so frägt es sich: Wie viel hat er bey dieser Waare gewonnen oder verloren?

48. Aufgabe. Als Jemand gefragt wurde, wie viel Tauben er in seinem Taubenschlage habe, so antwortrte derselbe: Wenn es wahr ist, daß jedes Taubenpaar im Durchschnitt jährlich sechsmal, jedesmal zwey Eyer ausbrütet, und daß von diesen Jungen wenigstens der dritte Theil aufkömmt, so kann ich von meinen Tauben, von welchen die eine Hälfte Männchen, die andere Weibchen sind, das ganze Jahr (zu 360 Tagen) hindurch alle drey Tage ein Paar junge Tauben speisen. Frage: Wie viel Tauben befanden sich in diesem Taubenschlage?

49. Aufgabe. Im Jahre 1825 wurde in Böhmen von dem 956 Quadratmeilen betragenden Flächeninhalte ungefähr der $^{96}/_{239}$ste Theil zum Ackerbau, der $^{58}/_{239}$ste Theil zur Waldkultur, der $^{20}/_{239}$ste Theil zum Wiesenbau und der $^{2}/_{239}$ste Theil zur Gartenkultur verwendet. Frage: Wie viel Quadratmeilen Aecker, Wälder, Wiesen und Gärten hatte Böhmen in diesem Jahre?

50. Aufgabe. Im Jahre 1827 gab es so viele patentirte Elbeschiffe in Böhmen, daß, wenn jedes derselben im Durchschnitt 3604 Centner Ladung aufnehmen und die Fahrt in's Ausland jährlich nur 20mal unternehmen konnte, 10884080 Centner Waaren auf Elbeschiffen jährlich in's Ausland verführt werden konnten. Frage: Wie viel patentirte Elbeschiffe hatte Böhmen im Jahre 1827?

51. Aufgabe. Wie viel Kirschbäume könnte man in 25 Jahren von einem einzigen Kirschkern ziehen, wenn man die Kerne von den Kirschen, die derselbe trägt, nachdem er zum Baume herangewachsen ist, wieder anbaut, und die von diesen erhaltenen Kirschkerne immer wieder pflanzt; da man weiß, daß vom Kern gezogene Kirschbäume im Durchschnitt erst im zehnten Jahre so zu tragen anfangen, daß sie jedes Jahr im Durchschnitt 2 Strich Kirschen tragen, und auf einen Strich ungefähr 20000 Kirschen geben?

52. Aufgabe. Ein Mensch hat seit seinem 20sten Jahre (das Jahr zu 365 Tagen gerechnet), im Durchschnitt täglich Mittags drey Seidel und Abends eine Maß Bier getrunken. Es frägt sich daher: Wie viel Faß Bier hat dieser Mensch, der ein Alter von 75 Jahren erreicht hat, verbraucht?

53. Aufgabe. Wenn man annimmt, daß gleich in dem ersten Jahre der Gründung der Neustadt Prag 309 Häuser erbaut, und in jedem folgenden Jahre mit Einschluß des Jahres 1831 jährlich 2 neue Häuser zugebaut wurden, so gibt dieß 1273 als die jetzige Häuserzahl der Neustadt Prag. Frage: Wann ist die Neustadt gegründet worden?

54. Aufgabe. Von Franzensbrunn in Böhmen werden jährlich so viele Flaschen versandt, daß, wenn man annimmt, es werden im Durchschnitt jährlich ein Dritttheil derselben im Preise von 48 kr. die Flasche in's Ausland versendet, der Uiberrest aber im Preise von 36 kr. im Inland verbraucht, dieselben einen jährlichen Ertrag von 24000 Gulden geben. Frage: Wie viel Flaschen Franzensbrunn werden jährlich versendet?

55. Aufgabe. Ein Handelsmann kauft drey Centner Kaffee um 330 fl., und verkauft das Pfund um 1 fl. 15 kr. Es frägt sich: Wie viel Pfund muß er verkaufen, um 18 fl. zu gewinnen?

56. Aufgabe. Es sollen 48000 Kavalleriepferde mit Futter versorgt werden. Da man nun auf ein Pferd täglich 4,5 Pfund Hafer und 12 Pfund Heu rechnet, dasselbe aus der Entfernung herbeygeschafft werden muß, so daß ein zweyspänniger Wagen mit 8 Centner Ladung auf jedes Pferd 3 Tage zur Hin- und Rückfahrt braucht, so frägt es sich: Wie viel Zugpferde und zweyspännige Wägen wird man brauchen, damit täglich der nöthige Bedarf an Futter herbeygeschafft werde?

57. Aufgabe. Auf die Frage, wie weit Wien von Moskau entfernt sey, antwortete Jemand: Wenn man die 9000 Häuser, welche Moskau enthält, sämmtlich in Einkehrhäuser verwandeln und auf dem Wege dahin in gleichen Entfernungen aufstellen möchte, würde der Weg von einem Einkehrhause bis zum andern 141° 2′ betragen. Frage: Wie viel Meilen (zu 4000 Klafter gerechnet), beträgt die Entfernung von Wien nach Moskau?

58. Aufgabe. Seit dem Jahre 1771 bis zum Jahre 1831 sind in Böhmen so viele periodische Zeitschriften erschienen, daß, wenn sie sämmtlich im Jahre 1771 angefangen und bis zu diesem Jahre fortgedauert hätten, jede derselben 2 Blätter täglich herausgegeben und im Durschschnitt nur 200 Abnehmer gehabt hätte, bereits 1095000000 Druckblätter von diesen Zeitschriften aufgelegt worden wären. Frage: Wie viel Zeitschriften sind in Böhmen seit dem Jahre 1771 bis 1831 erschienen?

59. Aufgabe. Die Wollenzeugfabrik zu Neugedein in Böhmen beschäftigte im Jahre 1827 6452 Menschen. Von diesen waren $^{4}/_{1613}$ mit Wollsortirung, $^{113}/_{1613}$ mit Wollkämmen, $^{1352}/_{1613}$ mit Wollspinnen, $^{126}/_{1613}$ mit Weben, $^{6}/_{1613}$ mit Färben der Wolle, $^{6}/_{1613}$ mit der Zurichtung der gewebten Stoffe, $^{4}/_{1613}$ mit der Leitung der mechanischen Werkstätte und $^{2}/_{1613}$ mit der Aufsicht über das Ganze beschäftigt. Frage: Wie viel Personen waren mit jeder dieser Arbeiten befaßt?

60. Aufgabe. Als Jemand gefragt wurde, wie viel Geld er habe, antwortete er: Ich habe eine Anzahl Eingulden- und Einkreuzerstücke. Wenn du jedes Stück einzeln und in jeder Sekunde um 1 weiter zählst, so brauchst du 81 Sekunden zum Zählen. Wenn du aber statt jedes Einguldenstückes 60 Kreuzer zählst, so brauchst du zum Zählen des ganzen Betrages 25 Minuten und 56 Sekunden. Wie viel Eingulden- und Einkreuzerstücke hatte derselbe?

61. Aufgabe. Wie viel Ziffern muß der Dividend haben, wenn der Divisor 5, der erste Theildividend 6 und der Quotient 12 Ziffern hat?

62. Aufgabe. Ein Tuchmacher kauft 4 Centner Schafwolle, den Centner zu 60 fl., für das Krämpeln der Wolle zahlt er bey jedem Centner 3 fl. 15 kr., jedoch gehen durch das Krämpeln 10 Pfund im Durchschnitt von jedem Centner verloren, für das Spinnen der Wolle zahlt er bey jedem Pfunde 12 kr.; für die Farbe an jedem Centner 15 fl.; für das Weben endlich bey jeder Elle 45 kr. Da er nun auf eine Elle Tuch 2 Pfund Wolle braucht, so frägt es sich: Wie viel Ellen Tuch wird er aus der gekauften Wolle bereiten, und wie hoch wird jede Elle zu stehen kommen?

63. Aufgabe. Als Jemand gefragt wurde, welches die

Höhe von Prag und Leitmeritz über dem Meere sey, antwortete er: Die Höhe von Prag und Leitmeritz zusammen beträgt 152 Wiener Klafter. Nimmt man von der um 1 vermehrten Summe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{15}$, so gibt die Summe, wenn man noch 2,5 hinzufügt, die Höhe von Prag. Frage: Welches ist die Höhe von Prag und Leitmeritz über dem Meere?

64. Aufgabe. Wie groß ist die Bevölkerung Böhmens, wenn auf jede Quadratmeile seines 956 Quadratmeilen betragenden Flächeninhaltes 4005 Einwohner gerechnet werden?

65. Aufgabe. Ein viereckiges Feld von 182 Länge und 122° Breite soll ringsum mit Obstbäumen eingefaßt und überdieß noch in der Mitte sowohl der Breite als der Länge nach eine Allee durch dasselbe geführt werden. Da nun die Bäume sowohl bey der Einfassung als in den Alleen 2° weit von einander stehen, die Alleen aber 4° breit seyn sollen, so frägt es sich: Wie viel Bäume wird man brauchen?

66. Aufgabe. Wenn man auf jede Quadratklafter der in Böhmen befindlichen Waldungen im Durchschnitt 5 Bäume rechnet, so hat Böhmen 23529785770 Waldbäume. Frage: Wie viel Joch (das Joch zu 1600 Quadratklaftern) Waldungen hat Böhmen?

67. Aufgabe. Wenn man von der Zahl des Jahres, in welchem Wien gegründet wurde, 0,46 abzieht, den Rest durch 2,4 dividirt, den Quotienten mit 3,78 multiplizirt und zum Produkte 1,5745 addirt, so erhält man die Jahrszahl 1831. Frage: In welchem Jahre ist Wien gegründet worden?

68. Aufgabe. Ein Mensch hat seit seinem 15. Jahre täglich $7\frac{3}{4}$ Stunden mit Schlafen, $\frac{3}{4}$ Stunden mit Ankleiden, $\frac{1}{4}$ Stunde mit dem Frühmahle, $\frac{5}{8}$ Stunden mit dem Mittagmahle, $\frac{2}{3}$ Stunden mit dem Abendmahle und $\frac{1}{5}$ Stunden mit Auskleiden zugebracht. Es frägt sich daher: Wie viel Zeit hat dieser Mensch, der ein Alter von 74 Jahren erreichte, mit Schlafen, Speisen, An- und Auskleiden zugebracht?

69. Aufgabe. Ein Fabrikant braucht jährlich 240 Klafter Holz, welches er im Orte mit 9 fl. 48 kr. bezahlen muß. Um diesen Holzbedarf wohlfeiler zu decken, kauft er im Walde 80 Stämme, von welchen ihm jeder im Durchschnitt 3 Klafter Holz gibt. Wenn er nun für jeden Stamm 9 fl. 51 kr., für das

Fällen und Schneiden bey jeder Klafter 2 fl. 30 kr. und für die Zufuhr auch bey jeder Klafter 1 fl. 16 kr. zahlen muß, so frägt es sich, ob er auf diese Art wohlfeiler oder theurer kaufen werde?

70. Aufgabe. Die Länge des Moldauflusses von Budweis bis Prag beträgt 27, von Prag bis Melnik aber 7 Meilen. Da nun das Gefälle dieses Flusses von Budweis bis Prag auf je 100 Klaftern im Durchschnitt 6,4″, von Prag bis Melnik aber ebenfalls auf je 100 Klafter 4″ beträgt, so frägt es sich: Um wie viel liegt die Moldau bey Budweis höher als bey Prag und bey Melnik, wenn man 4000 Klafter auf eine Meile rechnet?

71. Aufgabe. Böhmen hat 163 Märkte mehr als Vorstädte, 11 Städte mehr als Vorstädte, 11662 Dörfer mehr als Städte, und es kommen auf jede Quadratmeile seines 956 Quadratmeilen großen Flächenraumes 125 Dörfer. Frage: Wie viel Märkte, Vorstädte, Städte und Dörfer enthält Böhmen?

72. Aufgabe. Jemand ist im Jahre 1796 den 15. März um die dritte Nachmittagsstunde geboren und am 16. September 1826 um 7 Uhr Abends gestorben. Frage: Wie alt ist dieser Mensch geworden?

73. Aufgabe. Als ein Vater gefragt wurde, wann sein Sohn und seine Tochter geboren sey, gab er zur Antwort: Heute bin ich gerade 10 Jahre älter, als mein Sohn und meine Tochter zusammen. Nach 52 Tagen, das ist den 8. Oktober 1832, werde ich meinen 39. Geburtstag feyern, und da wird mein Sohn 15 Jahre, 7 Monate und 12 Tage alt seyn. Frage: Wann ist Sohn und Tochter geboren? (das Jahr zu 360 Tagen gerechnet.)

74. Aufgabe. In Petersburg sind schon im Januar grüne Erbsen zu haben. Da jedoch das Pfund davon, dort zu 26 Loth gerechnet, um diese Zeit bis 30 Rubel, den Rubel zu 1 fl. 30 kr. gerechnet, kostet, und zu einem Souper auf 15 Personen doch wenigstens drey Pfund nach dortigem Gewichte gerechnet werden müssen; so frägt es sich: Was kosten zu einem solchen Gerichte die Erbsen, was kostet eine Erbse, und um wie viel Gulden Erbsen speist jede von den 15 Personen, wenn man annimmt, daß dieß Gericht ganz aufgezehrt wird und daß ferner ein Pfund von 32 Loth im Durchschnitt 3264 solcher Erbsen enthält?

75. Aufgabe. Böhmen erzeugt jährlich im Durchschnitt

30720000 Metzen Getreide, von welchem ungefähr 2/24 Waizen, 4/24 Gerste, 7/24 Hafer und 11/24 Korn sind. Da nun ein Metzen Korn 1750000, ein Metzen Gerste 1032000, ein Metzen Waizen 1306000, ein Metzen Hafer 824000 Körner enthält; so frägt es sich: Wie viel Körner Waizen, Korn, Gerste und Hafer, und wie viel Getreidekörner überhaupt erzeugt Böhmen jährlich?

76. Aufgabe. Wie viel wird die Zufuhr von 6 eichenen Stämmen, jeder von 220 Kubikschuh Inhalt, auf die Entfernungen 4,5 Meilen kosten, wenn jeder Kubikschuh trockenes Eichenholz in Durchschnitt 45 Pfund wiegt, auf ein Stück Zugvieh 9 Centner gerechnet und für jedes Stück Zugvieh auf jede Meile 30 kr. bezahlt werden?

77. Aufgabe. Wenn 1000 kleine Tischlernägel 3½ Pf. wiegen, so frägt es sich: Wie viel solche Nägel gehen auf ein Loth und wie viel wiegt jeder solche Nagel?

78. Aufgabe. Es soll eine Mauer von 36° 3′ Länge und der erforderlichen Höhe und Breite gebaut werden. Da nun zu einer Klafter Länge von dieser Mauer 840 Ziegeln erfordert werden, und ein fleißiger Maurer des Tages 800 Stück Ziegeln verarbeitet, so frägt es sich: In wie viel Tagen wird diese Mauer fertig werden, wenn 5 Maurer zugleich arbeiten?

79. Aufgabe. Ein Franzose, mit Namen Perrault, hat eine Windbüchse erfunden, mit welcher man in einer Minute 5000 Kugeln abfeuern kann. Wenn man nun annimmt, daß nur jede 20ste Kugel ihren Mann gehörig trifft, und daß man zum jedesmaligen Laden einer solchen Windbüchse 9 Minuten braucht, so frägt es sich: Wie viel mit solchen Windbüchsen bewaffnete Soldaten wären erforderlich, um in zwey Stunden eine Armee von 600000 Mann niederzuschießen?

80. Aufgabe. Es ist bekannt, daß in Prag im Durchschnitt unter je 82 Menschen einer ein Alter von 90 Jahren, unter 2050 je 7 ein Alter von 95 Jahren, unter 4100 je 9 ein Alter von 100 Jahren und unter je 820 einer ein Alter von 105 bis 115 Jahren erreicht. Frage: Wie viel Menschen erreichen in Prag jährlich ein Alter von 90, 95, 100 und 105 bis 115 Jahren, wenn man die Bevölkerung Prags sammt der Garnison und den Vorstädten auf 118900 Menschen annimmt?

81. Aufgabe. Ein Geflügelhändler antwortete auf die

Frage, wie viel Gänſe, Hühner und Enten er habe: Ich verkaufe jede Gans um 1 fl. 30 kr., jedes Huhn um 45 kr. und jede Ente um 54 kr. Hätte ich ſtatt der Hühner und Enten lauter Gänſe, ſo würde ich 135 fl. löſen; hätte ich nur ſtatt der Enten eben ſo viele Gänſe, ſo bekäme ich für alle Gänſe zuſammen 75 fl.; und hätte ich nur ſtatt der Hühner Gänſe, ſo würde ich für alle Gänſe zuſammen 105 fl. bekommen. Frage: Wie viel Gänſe, Hühner und Enten hatte dieſer Geflügelhändler zuſammen?

82. Aufgabe. Ein Handelsmann verkauft am erſten Tage einer Woche 78 Ellen von einer Waare, die Elle zu 2 fl. 34 kr., und gewinnt an jeder Elle $9\frac{1}{2}$ kr.; am zweyten Tage derſelben Woche verkauft er 96 Ellen einer andern Waare, die Elle um 3 fl. 54 kr., und gewinnt an jeder Elle $12\frac{1}{4}$ kr.; am dritten Tage 45 Ellen zu 1 fl. 48 kr. und gewinnt an jeder Elle $7\frac{2}{3}$ kr.; am vierten Tage 48 Ellen zu 1 fl. 24 kr., wobey er an jeder Elle $6\frac{3}{4}$ kr. gewinnt; am fünften Tage 68 Ellen zu 3 fl. 15 kr., mit einem Gewinne von $10\frac{1}{2}$ kr. an jeder Elle; am ſechsten Tage endlich 85 Ellen zu 2 fl. 10 kr. mit einem Gewinne von $11\frac{3}{5}$ kr. an jeder Elle. Es frägt ſich daher: Wie viel hat dieſer Handelsmann durch die ganze Woche im Geſammtbetrage eingenommen, und wie groß iſt ſein reiner Gewinn?

83. Aufgabe. Auf die Frage: Wie viel Meilen Wien von Paris auf der gewöhnlichen Poſtſtraße entfernt ſey, antwortete Jemand: Ein Menſch, der täglich 12 Stunden geht, in jeder Stunde 5000 Schritte macht, wird, wenn man je 5 Schritte auf 2 Klafter und 4000 Klafter auf jede Meile rechnet, in 35 Tagen und 2 Stunden von Wien nach Paris gelangen. Frage: Wie viel Meilen iſt Wien von Paris entfernt?

84. Aufgabe. Auf die Frage: Wann das erſte neue Teſtament in böhmiſcher Sprache gedruckt worden ſey, gab Jemand zur Antwort: Wenn man die gegenwärtige Jahreszahl (1832) um 32 vermindert, und den Ueberreſt wieder um ſeinen 6ſten, 120ſten und 180ſten Theil verringert, ſo erhält man die Jahreszahl, unter welcher das erſte neue Teſtament in böhmiſcher Sprache in Pilſen aufgelegt wurde. Frage: Wann iſt das erſte neue Teſtament in böhmiſcher Sprache aufgelegt worden?

85. Aufgabe. Ein Gärtner übernimmt eine Baumſchule

unter der Bedingung, daß dieselbe am Schluße jeden Jahres mit 1000 Baumsetzlingen besetzt seyn, aus derselben nur einjährige Setzlinge verkauft und der jedesmalige Abgang sogleich wieder durch neue Setzlinge ergänzt werden solle. Am Schluße des sechsten Jahres befinden sich in dieser Baumschule 400 einjährige, 155 zweyjährige, 225 dreyjährige, 145 vierjährige, 50 fünfjährige und 25 sechsjährige Setzlinge. Frage: Wie viel einjährige Bäumchen hat dieser Baumgärtner in jedem dieser sechs Jahre verkauft?

86. Aufgabe. Von einem Striche Kornmehl werden 16 Laibe Brod gebacken, der Laib Brod um 36 kr. verkauft. Wenn nun ein Bäcker täglich 8 Strich Kornmehl verbäckt, den Strich mit 7 fl. 30 kr. bezahlt; nebstdem täglich um 30 kr. Salz und eine halbe Klafter Holz, auf 4 fl. 24 kr. gerechnet, verbraucht, und 4 fl. 36 kr. Arbeitslohn bezahlt; so frägt es sich: Wie viel gewinnt er täglich im Ganzen und wie viel an jedem Laib Brod?

87. Aufgabe. In einem Ziegelschlage werden bey dem jedesmaligen Brande 10000 Mauerziegeln und 5000 Dachziegeln gebrannt. Wenn nun der Ziegelschläger für 1000 Mauerziegeln 3 fl., für 1000 Dachziegeln aber 4 fl. 36 kr. bekömmt, zu dem jedesmaligen Brande 6 Klafter Holz zu 8 fl. 30 kr. und 10 Fuhren Steinkohlen zu 6 fl. 20 kr. verbraucht werden, und zwey Taglöhner, jeder mit 1 fl. 48 kr. bezahlt werden; auch ein Zehntheil der Mauerziegeln und ein Fünftheil der Dachziegeln, welche nämlich beym Brennen mißrathen oder sonst zerschlagen werden, bey dem jedesmaligen Brande in Abschlag kommen; so frägt es sich: Wie theuer wird das Tausend Dach- und Mauerziegeln kommen?

88. Aufgabe. Wenn man annimmt, daß in Böhmen, welches immer reich an Silber war, seit dem Jahre 1400 bis zu dem Jahre 1831 jährlich eben so viel Silber gegraben wurde, als in dem Jahre 1825, und man aus jeder Mark Silber, so wie jetzt, 10 harte Thaler oder Zweyguldenstücke geprägt habe, so würden bereits 58960800 Thaler aus böhmischem Silber geprägt worden seyn. Frage: Wie viel Mark Silber lieferte Böhmen im Jahre 1825?

89. Aufgabe. Die englische Sprache enthält ungefähr 22000 Wörter. Davon ist der $\frac{1}{22}$ste Theil deutschen, der $\frac{3}{44}$ste lateinischen und griechischen, der $\frac{1}{11}$te Theil vermischten und nur

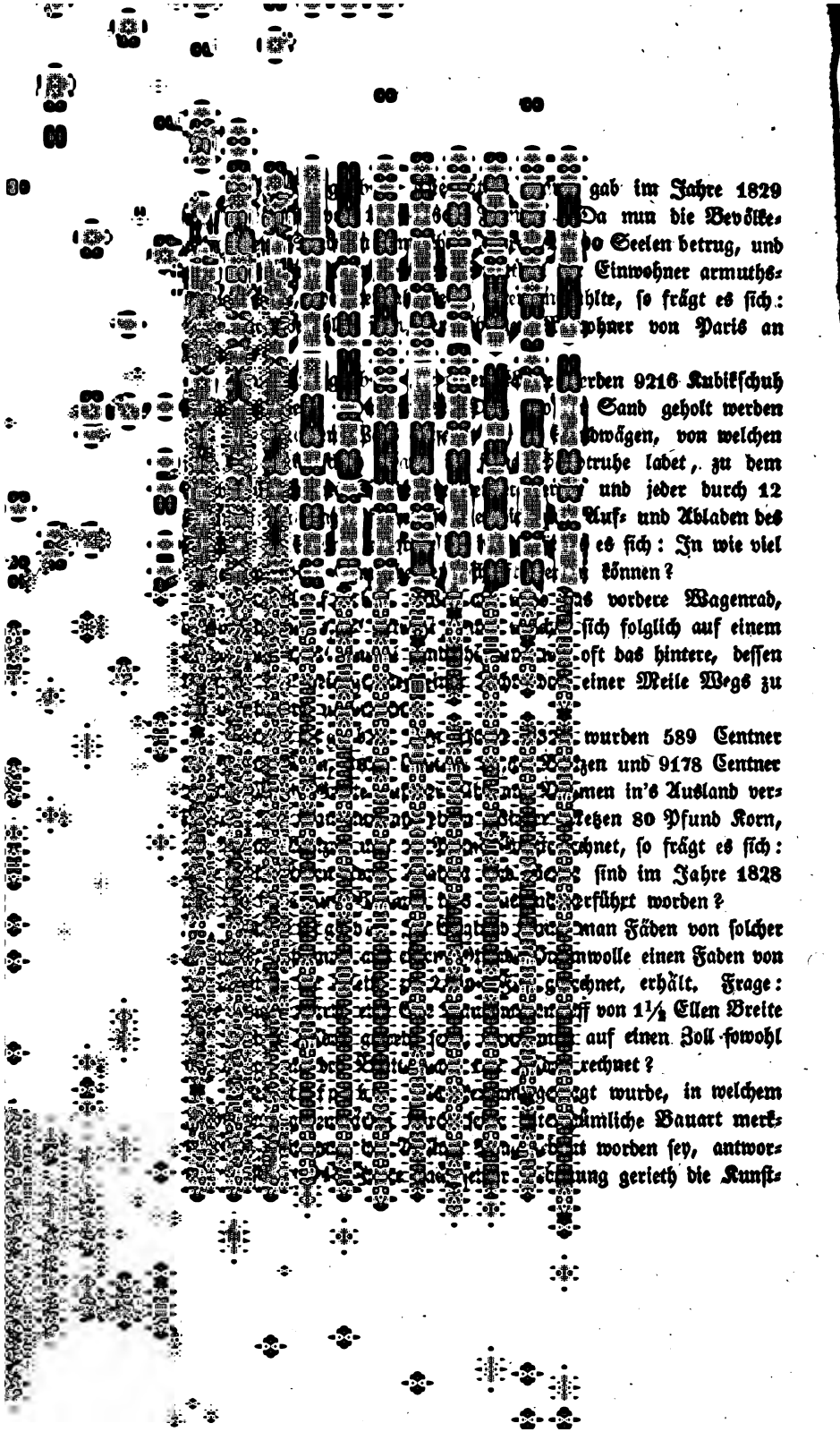
der Uiberrest ächt englischen Ursprungs. Frage: Wie viel ächt englische Wörter enthält die englische Sprache?

90. Aufgabe. Es soll eine Mauer von 64 Klafter Länge 1° 4′ Höhe und 2′ Breite gebaut werden. Da man nun auf die Länge einer Klafter von dieser Mauer 1380 Ziegeln braucht, und auf je 1000 Ziegeln 32 Kubikschuh oder 8 Strich Kalk, und auf jeden Strich Kalk 8 Kubikschuh oder eine halbe Fuhre Sand gerechnet werden, so frägt es sich: Wie viel Ziegeln, wie viel Strich Kalk und wie viel Fuhren Sand werden auf diese Mauer verbraucht werden?

91. Aufgabe. Ein Gutsbesitzer hat einen Weingarten von 4 Strich Ausmaß, von dem er im Durchschnitt in einem guten Jahre 28 Eimer, in einem mittleren Jahre 20 Eimer und in einem schlechten Jahre 8 Eimer Wein erhält, und den Eimer im Durchschnitt um 32 fl. 30 kr. verkauft. Diesen Weingarten will derselbe in ein Getreidefeld verwandeln, und hofft von demselben, wenn er es jedes dritte Jahr Brache ließe, das zehnfache Getreide zu erndten. Wenn man nun annimmt, daß binnen 9 Jahren immer zwey gute, 3 mittlere und 4 schlechte Weinjahre kommen, daß die Bearbeitung des Weingartens jährlich 240 fl., des Feldes aber nur 46 fl. 30 kr. kostet, und der Strich Getreide mit 9 fl. 45 kr. bezahlt wird, so ist die Frage: Wird der Gutsbesitzer bey dieser Umgestaltung gewinnen oder verlieren?

92. Aufgabe. Wenn man annimmt, daß im Durchschnitt jeder von den Bewohnern Europas täglich eine Schale Kaffee trinkt, auf eine Schale $\frac{3}{4}$ Loth, und das Pfund zu 32 Loth im Durchschnitt auf 40 kr. kömmt, so frägt es sich: Wie viel Kaffee wird täglich, und wie viel jährlich, das Jahr zu 365 Tagen gerechnet, in Europa bey einer Bevölkerung von 208276000 verbraucht, und wie viel beträgt die Auslage für denselben?

93. Aufgabe. Wenn man annimmt, daß von den in Böhmen im Jahre 1827 verbrauchten Steinkohlen der vierte Theil für Fabriken verwendet wurde, so kommen, wenn von den 3828000 Bewohnern Böhmens nur jeder Hunderte von Steinkohlen Gebrauch machte, auf jeden dieser letztern im Durchschnitt jährlich $29^{149}/_{319}$ Centner Steinkohlen. Frage: Wie viel Centner Steinkohlen wurden im Jahre 1827 in Böhmen verbraucht?



gab im Jahre 1829
Da nun die Bevölke-
o Seelen betrug, und
Einwohner armuths-
hlte, so frägt es sich:
ohner von Paris an

rden 9216 Kubikschuh
Sand geholt werden
dwägen, von welchen
etruhe ladet, zu dem
und jeder durch 12
Auf- und Abladen des
es sich: In wie viel
können?

as vordere Wagenrad,
sich folglich auf einem
oft das hintere, dessen
einer Meile Wegs zu

wurden 589 Centner
zen und 9178 Centner
men in's Ausland ver-
etzen 80 Pfund Korn,
chnet, so frägt es sich:
sind im Jahre 1828
erführt worden?

man Fäden von solcher
nwolle einen Faden von
chnet, erhält. Frage:
ff von 1½ Ellen Breite
auf einen Zoll fowohl
rechnet?

egt wurde, in welchem
ämliche Bauart merk-
t worden sey, antwor-
ung gerieth die Kunst-

uhr, mit welcher dieses Gebäude geschmückt ist, in's Stocken, und man sah sich genöthigt, in diesem Jahre noch eine neue Zwölfstundenuhr anzubringen. Nimmt man nun an, daß der Stundenhammer dieser Uhr jeden Stundenschlag von diesem Jahre bis zum Schluße des Jahres 1831 genau gegeben habe, so hat derselbe bereits die Zahl von 25623000 Glockenschlägen gegeben. Frage: In welchem Jahre (das Jahr zu 365 Tagen), ist das Rathhaus der Altstadt Prag erbaut worden?

100. Aufgabe. Im Jahre 1829 hatten so viele Kurgäste Karlsbad besucht, daß, wenn man annimmt, jeder derselben habe im Durchschnitt täglich 10 Becher getrunken und diese Cur durch 6 Wochen fortgesetzt, 3794 Eimer 35 Maß Karlsbader Wasser getrunken worden sind. Frage: Wie viel Curgäste befanden sich im Jahre 1829 in Carlsbad (wenn man den Eimer zu 40 Maß, die Maß zu 4 Seidel, das Seidel zu 3 Bechern rechnet)?

Auflösungen der Aufgaben.

1. Aufgabe. London enthält 126000, Constantinopel 80000, Lissabon 44000, Neapel 40000, Rom 36000, Palermo 35400, Paris 27400 und Amsterdam 27200 Häuser.

2. Aufgabe. Prag liegt unter dem 32. Grade der Länge und 50. Grade der Breite.

3. Aufgabe. Diese Heerde bestand aus 80 Gänsen.

4. Aufgabe. Im Jahre 1829 hatte Teplitz 8450, Karlsbad 4899, Marienbad 1775 und Franzensbad 1223 Kurgäste.

5. Aufgabe. Der Antheil der Arbeiter wird für das Ackern und Säen $19^{57}/_{64}$ Strich, für das Schneiden und Dreschen $24^{221}/_{256}$ Strich und der des Besitzers $154\ ^{39}/_{256}$ Strich betragen.

6. Aufgabe. Oesterreichs deutsche Provinzen haben 3480, Bayern 1500, Sachsen 279, Nassau 90, Waldeck 21 und Lichtenstein 2,5 geographische Meilen Flächeninhalt.

7. Aufgabe. Der Minutenzeiger einer solchen Taschenuhr legt in 50 Jahren einen Weg von $10^1/_2$ Meilen zurück.

8. Aufgabe. Dieser Weg beträgt an jedem Tage 3471,12; in jeder Stunde 144,63 und in jeder Minute 24,105 geographische Meilen.

9. Aufgabe. Diese Umgestaltung wird in 10 Jahren einen Gewinn von 1100 Gulden bringen.

10. Aufgabe. Die Höhe der Schneekoppe ist 848 Wiener Klafter.

11. Aufgabe. Man wird 3360 Bäume brauchen.

12. Aufgabe. Die Republik San Marino hat einen Flächeninhalt von 1,06 Quadratmeilen.

13. Aufgabe. Das erste Papier von Lumpen wurde im Jahre 1300 bereitet.

14. Aufgabe. Das ganze Vermögen betrug 186000 Gulden; der Antheil der Frau 93000 Gulden; der der Tochter 62000 Gulden.

15. Aufgabe. Europa enthält 154036; Australien 162838; Afrika 523080; Amerika 761928 und Asien 803230 geographische Meilen.

16. Aufgabe. Vom Aetna werden jährlich 116000 Pf. Schnee verkauft.

17. Aufgabe. Diese 8 Stämme werden 120 fl. kosten.

18. Aufgabe. Im Jahre 1829 waren in Böhmen 68 Glasdrucker, 2064 Glas- und Compositionsschleifer, 1680 Perlenschleifer, 150 Perlenblaser, 526 Perlenanreiher, 42 Perlenvergolder und 12 Compositionsbrenner beschäftigt.

19. Aufgabe. Der Quotient wird 9 Ziffern haben.

20. Aufgabe. Der Faden müßte 10800' lang seyn.

21. Aufgabe. Böhmens Kunststraßen betrugen im Jahre 1829: 1474816,5 Klafter oder 368,704125 Meilen.

22. Aufgabe. Durch die Pest und Hungersnoth im Jahre 1771 und 1772 haben in Böhmen 250000 Menschen ihr Leben verloren.

23. Aufgabe. Die Stadt London verbraucht jährlich 47700000 Centner Steinkohlen.

24. Aufgabe. Die erforderlichen Bäume werden 580 fl., die dazu gehörigen Pfähle 186 fl. 40 kr., der Arbeitslohn 100 fl. und folglich die Kosten der ganzen Anlage 866 fl. 40 kr. betragen.

25. Aufgabe. Wien ist von Peking 1100 Meilen entfernt.

26. Aufgabe. Diese Druckerey kann täglich 278000 Bogen oder 6950 Bände, und in einem Jahre 101470000 Bogen oder 2536750 Bände drucken.

27. Aufgabe. Dieser Mensch hatte 90 Zweygroschenstücke, 100 Eingroschenstücke und 360 Einkreuzerstücke.

28. Aufgabe. Dieser Mann war den 5. Juny 1792 um 4 Uhr Nachmittags geboren.

29. Aufgabe. Der aus diesem Felde gelöste Betrag wird $738\frac{3}{32}$ Gulden seyn.

30. Aufgabe. Im Jahre 1828 wurden 1408818 Eyer auf der Elbe aus Böhmen in's Ausland verführt.

31. Aufgabe. In der Belagerung Prag's durch die Preußen im Jahre 1757 sind 22260 Bomben, 58640 Kanonenkugeln und 540 Carcassen gegen die Stadt geschossen worden.

32. Aufgabe. Die Ausgabe für den jährlichen Verbrauch des Kaffee beträgt 82 fl. $7\frac{1}{2}$ kr.

33. Aufgabe. Böhmens größte Breite beträgt 43, die größte Länge aber 36,5 Meilen.

34. Aufgabe. Lissabon ist von Constantinopel 920 Meilen entfernt.

35. Aufgabe. Dieser Mensch hat in 40 Jahren eine Heerde von 45 Ochsen, 150 Kälbern, 2400 Hühnern, 1600 Tauben und 300 Gänsen verbraucht.

36. Aufgabe. Die Bevölkerung des österreichischen Kaiserstaates beträgt auf eine Quadratmeile 2450 Bewohner.

37. Aufgabe. Die Windmühlen wurden im Jahre 999 erfunden.

38. Aufgabe. Aus dieser Baumschule sind im zweyten Jahre 1875, im vierten Jahre 1660 und im sechsten Jahre 1180 Setzlinge verkauft worden.

39. Aufgabe. Diese Mauer wird 217 fl. 51 kr. 2⅞ Pf. kosten.

40. Aufgabe. Im Jahre 1825 zählte Wien 44480 Fremde, 800 Geistliche, 3882 Adeliche, 3429 Beamte und 229169 Bürger und sonstige Bewohner.

41. Aufgabe. Dieser Bauer wird 371520000 Körner Gerste, 350000000 Körner Roggen, 156720000 Körner Waizen, 52736000 Körner Hafer, 16560000 Körner Linsen, und im Ganzen 947536000 Körner erndten.

42. Aufgabe. Archangel wird in 28,612303, und Rom in 21,19954 Sekunden eine Meile von dem Umfange des Parallelkreises, unter welchem jede von beyden Städten liegt, zurücklegen.

43. Aufgabe. Die Zunahme der Bevölkerung von New York betrug vom Jahre 1783 bis 1831 im Durchschnitt jährlich 3875 Menschen.

44. Aufgabe. Diese Ziegelbrennerey kann jährlich 15mal brennen, liefert jährlich 750000 Ziegeln, und verbraucht jährlich 150 Klafter hartes und 375 Klafter weiches Holz.

45. Aufgabe. Hiezu werden 128000 Gänse erfordert.

46. Aufgabe. Das erste Kaffeehaus ist im Jahre 1551 zu Konstantinopel errichtet worden.

47. Aufgabe. Der Handelsmann hat bey dieser Waare 171 fl. 52½ kr. verloren.

48. Aufgabe. In diesem Taubenschlage befanden sich 120 Tauben.

49. Aufgabe. Im Jahre 1823 hatte Böhmen 384 Quadratmeilen Ackerland, 232 Quadratmeilen Waldung, 80 Quadratmeilen Wiesen und 8 Quadratmeilen Gärten.

50. Aufgabe. Im Jahre 1827 hatte Böhmen 151 patentirte Elbeschiffe.

51. Aufgabe. Man würde 24000600001 Kirschbäume erhalten.

52. Aufgabe. Dieser Mensch hat in seinem Leben 219 Faß, 2 Eimer, 11 Maß und 1 Seidel Bier verbraucht.

53. Aufgabe. Der Grundstein zur Neustadt Prag ist im Jahre 1348 gelegt worden.

54. Aufgabe. Es werden jährlich im Durchschnitt 36000 Flaschen Franzensbrunn versendet.

55. Aufgabe. Um 18 Gulden zu gewinnen, muß er 120 Pfund Kaffee verkaufen.

56. Aufgabe. Man wird 2970 Pferde und 1485 zweyspännige Wägen brauchen, nämlich dreymal so viel, als auf einen Tag erfordert werden, da zur Hin- und Rückfahrt 3 Tage erforderlich sind.

57. Aufgabe. Wien ist von Moskau 318 Meilen entfernt.

58. Aufgabe. In Böhmen sind seit dem Jahre 1771 bis 1831, 125 periodische Zeitschriften erschienen.

59. Aufgabe. In der Neugedeiner Wollenzeugfabrik waren im Jahre 1827, 16 Personen mit Wollsortiren, 452 mit Wollkämmen, 5408 mit Wollspinnen, 504 mit Weben, 24 mit Färben, 24 mit Zurichtung der Stoffe, 16 mit Leitung der Maschinen und 8 mit der Aufsicht beschäftigt.

60. Aufgabe. Dieser Mann hatte 25 Eingulden- und 56 Einkreuzerstücke.

61. Aufgabe. Der Dividend muß 17 Ziffern haben.

62. Aufgabe. Dieser Tuchmacher wird aus der gekauften Wolle 180 Ellen Tuch bereiten, und die Elle wird ihm auf 2 fl. 51⅓ kr. zu stehen kommen.

63. Aufgabe. Die Höhe von Prag über dem Meere ist 94,5, und die von Leitmeritz 57,5 Wiener Klafter.

64. Aufgabe. Die Bevölkerung von Böhmen beträgt 3828780 Einwohner.

65. Aufgabe. Man wird 588 Bäume brauchen.

Anmerkung. Um diese Summe herauszubringen, muß man diejenigen Bäume vom äußern Umfange abrechnen, welche dadurch wegfallen, daß in der Mitte der Länge und Breite nach eine Allee von 4° Breite geht; eben so darf man die jedesmaligen Eckbäume nicht doppelt zählen.

66. Aufgabe. Böhmen hat 2316223 Joch 354 Quadratklafter Waldung.

67. Aufgabe. Wien ist im Jahre 1162 gegründet worden.

68. Aufgabe. Dieser Mensch hat 25 Jahre, 64 Tage, 18 Stunden, 17 Minuten und 30 Sekunden mit Schlafen, Speisen, An- und Auskleiden zugebracht.

69. Aufgabe. Er wird auf diese Art um 660 fl. wohlfeiler kaufen.

70 Aufgabe. Die Moldau ist bey Budweis um 96 Klafter höher als bey Prag, und um 111° 3′ 4″ höher, als bey Melnik.

71. Aufgabe. Böhmen hat 114 Vorstädte, 277 Märkte, 288 Städte und 11950 Dörfer.

72. Aufgabe. Dieser Mensch ist 30 Jahre, 6 Monate, 1 Tag und 4 Stunden alt geworden.

73. Aufgabe. Die Tochter war den 28. März 1819, und der Sohn den 26. Februar 1817 geboren.

74. Aufgabe. Die grünen Erbsen zu einem solchen Gerichte kosten 135 fl., jede Erbse kostet $1\frac{1}{221}$ kr., und jeder von den Gästen speist um 9 fl. Erbsen.

75. Aufgabe. Böhmen erzeugt jährlich im Durchschnitt 2343360000000 Körner Waizen, 5283840000000 Körner Gerste, 7383040000000 Körner Hafer, 24640000000000 Körner Roggen und überhaupt 39651240000000 Getreidekörner.

76. Aufgabe. Die Zufuhr wird 148 fl. 30 kr. kosten.

77. Aufgabe. Auf ein Loth gehen 8,928571 Nägel und jeder wiegt 0,0035 Pfund oder 0,112 Loth.

78. Aufgabe. Die Mauer wird in 7,665 Tagen fertig werden.

79. Aufgabe. Um eine feindliche Armee von 600000 Mann in 2 Stunden niederzuschießen, wären nur 200 mit solchen Windbüchsen versehene Soldaten nothwendig.

80. Aufgabe. In Prag erreichen im Durchschnitt jährlich 1450 Menschen ein Alter von 90 Jahren, 406 ein Alter von 95, 261 von 100 und 145 ein Alter von 105 — 115 Jahren.

81. Aufgabe. Dieser Geflügelhändler hatte 30 Gänse, 40 Hühner und 20 Enten.

82. Aufgabe. Die Gesammteinnahme beträgt 1127 fl. 58 kr., der reine Gewinn aber 71 fl. 50 kr.

83. Aufgabe. Wien ist von Paris 199 Meilen entfernt.

84. Aufgabe. Das erste neue Testament ist in böhmischer Sprache in Pilsen im Jahre 1475 gedruckt worden.

85. Aufgabe. Der Gärtner hat im ersten Jahre 975, im zweyten 925, im dritten 780, im vierten 555 und im fünften Jahre 400 einjährige Setzlinge verkauft.

86. Aufgabe. Er gewinnt an jedem Laib Brod $3^{54}/_{128}$ kr. und im Ganzen 7 fl. 18 kr.

87. Aufgabe. Das Tausend Mauerziegeln kömmt auf 12 fl. $24^{4}/_{13}$ kr. und das Tausend Dachziegeln auf 14 fl. $49^{4}/_{13}$ kr.

88. Aufgabe. Böhmen lieferte im Jahre 1825, 13680 Mark Silber.

89. Aufgabe. Die englische Sprache enthält 4000 Wörter ächt englischen Ursprungs.

90. Aufgabe. Zu dieser Mauer werden 88320 Ziegeln, 2826,24 Kubikschuh oder 706,56 Strich Kalk und 5652,48 Kubikschuh oder 353,28 Fuhren Sand verbraucht werden.

91. Aufgabe. Der Gutsbesitzer wird bey dieser Umgestaltung 589 Gulden verlieren.

92. Aufgabe. In Europa werden im Durchschnitt täglich 48814 Centner 68 Pfund 24 Loth, jährlich aber 17817360 Ct. 93 Pf. 24 Loth Kaffee verbraucht, und für denselben täglich 3,254312 fl. 30 kr. und jährlich 1187824062 fl. 30 kr. ausgelegt.

93. Aufgabe. In Böhmen wurden im Jahre 1827 1504000 Centner Steinkohlen verbraucht.

94. Aufgabe. Jeder der übrigen Bewohner von Paris zahlte im Jahre 1829, $232^{543}/_{1205}$ Franken Steuer.

95. Aufgabe. In zwölf Tagen wird der benöthigte Sand herbeygeschafft werden können.

96. Aufgabe. Das vordere Wagenrad wird sich 3125mal, und das hintere 2500mal umdrehen.

97. Aufgabe. Im Jahre 1828 sind 736,9 Wiener Metzen Korn, 1365,906 Metzen Waizen, 12748,26 Metzen Gerste aus Böhmen auf der Elbe in's Ausland verführt worden.

98. Aufgabe. Eine Elle solchen Baumwollstoffes würde 0,0324 Pfund wiegen.

99. Aufgabe. Das gegenwärtige Rathhaus der Altstadt Prag ist im Jahre 1338 gebaut worden.

100. Aufgabe. Im Jahre 1829 befanden sich 4337 Curgäste in Karlsbad.

Von Potenzen und Wurzeln.

Einleitung.

a. **Ein Produkt aus gleichen Faktoren heißt eine Potenz.**

b. **Jeder der gleichen Faktoren einer Potenz heißt die Wurzel desselben.**

Wenn man z. B. die Zahl 8 mit 8 und abermals mit 8 multiplizirt, so ist 512, als das Produkt derselben, eine Potenz, und 8 die Wurzel derselben. Eben so ist, wenn man a mit a multiplizirt, aa oder a^2 eine Potenz, das ist, ein Produkt von gleichen Faktoren und a die Wurzel derselben.

Es gibt Potenzen von 2, 3, 4 u. s. w. oder n gleichen Faktoren, welche nach Verschiedenheit der Anzahl gleicher Faktoren zum Theil auch verschiedene Namen haben.

c. **Ein Produkt von zwey gleichen Faktoren heißt die zweyte Potenz.**

Die zweyte Potenz nennt man auch das **Quadrat**, weil man, um den Flächeninhalt eines Quadrates, das ist einer vierekigen Fläche zu finden, die Länge desselben mit der Breite, welche einander gleich sind, und folglich zwey gleiche Faktoren mit einander multipliziren muß.

So ist z. B. 64 das Quadrat oder die zweyte Potenz von 8, und a^2 das Quadrat von a.

d. **Ein Produkt von drey gleichen Faktoren heißt die dritte Potenz.**

Die dritte Potenz heißt auch **Cubus** oder **Würfel**, weil man, um den körperlichen Inhalt eines Cubus oder Würfels zu finden, die Länge desselben mit der Höhe, Breite und Länge, welche einander gleich sind, und folglich drey gleiche Faktoren mit einander multipliziren muß.

So ist z. B. 27 die dritte Potenz oder der Cubus von 3, denn $3 \times 3 \times 3 = 27$; eben so ist $b \times b \times b = bbb = b^3$, das heißt: b^3 ist der Cubus von b.

e. Ein Produkt von 4, 5, 6 .... n gleichen Faktoren heißt die 4te, 5te, 6te .... nte Potenz.

Die vierte Potenz wird auch Biquadrat und die sechste Bicubus genannt.

f. Die Zahl, welche anzeigt, wie oft eine Zahl als Faktor genommen werden soll, heißt Potenzexponent.

Soll z. B. die Zahl 8 auf die dritte Potenz erhoben oder 3mal als Faktor genommen werden, nämlich $8 \times 8 \times 8$; so ist 3 der Potenzexponent; soll a auf die nte Potenz erhoben oder nmal als Faktor genommen werden, so ist 12 der Potenzexponent.

f. Die Potenzexponenten werden immer etwas kleiner rechts oder derjenigen Zahl angeschrieben, welche auf eine Potenz erhoben werden soll.

Soll z. B. 36 auf die 4. Potenz erhoben werden, so wird dieß so angeschrieben: 36^4; eben so zeigt in dem Ausdrucke a^m der Potenzexponent m an, daß a auf die mte Potenz erhoben oder mmal als Faktor genommen werden soll.

g. Wenn ein zusammengesetzter Ausdruck (komplexe Größe) oder ein Bruch auf eine Potenz erhoben werden soll, wird dieß angezeigt, indem man dieselbe einschließt und den Potenzexponenten rechts außerhalb des Einschließungszeichens ansetzt.

Soll z. B. die Zahl $3a \times 46$ auf die xte Potenz oder $\frac{5}{8}$ auf die 3. Potenz erhoben werden, so wird dieß auf folgende Art angezeigt: $(3a \times 46)^x$ und $\left(\frac{5}{8}\right)^3$

h. Eine gegebene ganze Zahl wird auf jede Potenz erhoben oder potenzirt, indem man dieselbe einmal weniger mit sich selbst multiplizirt, als der gegebene Potenzexponent Einheiten hat.

Soll man z. B. die Zahl 8 auf die dritte Potenz erheben, so ist $8^3 = 8 \times 8 \times 8$, das heißt, man soll 8 dreymal als Faktor nehmen; mit 3 Faktoren aber kann man nur zweymal, das ist 3 — 1mal multipliziren. Eben so zeigt 6^5 an, daß man 6 5mal als Faktor nehmen oder 5 — 1 = 4mal mit sich selbst multipliziren solle, da man, um einmal zu multipliziren, schon zwey Faktoren braucht, um zweymal zu multipliziren, drey, und um 4mal zu multipliziren, 5, folglich allgemein um n — 1mal zu multipliziren, n Faktoren erfordert werden.

i. Ein Bruch wird auf jede Potenz erhoben, indem man sowohl Zähler als Nenner des gegebenen Bruches auf die verlangte Potenz erhebt.

Wenn der Bruch $\frac{3}{4}$ auf die 2. Potenz erhoben werden soll, so wird dieß geschehen, indem man sowohl Zähler als Nenner auf die zweyte Potenz erhebt, nämlich $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{9}{16}$.

k. Eine positive Zahl gibt, auf jede Potenz erhoben, wieder eine positive Zahl.

So gibt z. B.

$(+a)^2 = +a. +a = +aa = +a^2$, $(+a)^3 = +a. +a. +a = +aaa = +a^3$, $(+a)^n = +a. +a. +a \ldots n = aaaa = +a^n$.

Eben so gibt:

$+3^2 = +3. +3 = +9$

$+3^3 = +3. +3. +3 = +27$ u. s. w.

l. Eine negative Zahl gibt auf jeder Potenz, deren Exponent eine gerade Zahl ist, eine positive Zahl, und auf jeder Potenz, deren Exponent eine ungerade Zahl ist, eine negative Zahl.

So ist z. B.

$(-a)^2 = -a. -a = +aa = +a^2$

$(-a)^3 = (-a. -a) \times -a = +a^2 \times -a = -a^3$,

$(-a)^4 = -a. -a. -a. -a = +aaaa = +a^4$;

Oder allgemein, wenn man durch $2n$ jede gerade Zahl und durch $2n + 1$ jede ungerade Zahl bezeichnet, so ist:

$(-a)^{2n} = -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a \ldots^{2n} = +aaaa \ldots^{2n \text{ mal}} = +a^{2n}$.

$(-a)^{2n+1} = (-a \cdot -a \cdot -a \cdot -a \ldots^{2n \text{ mal}}) \times -a = +a^{2n} \times -a = -a^{2n+1}$.

Eben so ist:

$(-3)^3 = -3 \times -3 = +9$

$(-3)^3 = (-3 \times -3) \times -3 = +9 \times -3 = -27$ u. s. w.

Man kann daher für die Bezeichung der Potenzen folgende Regeln aufstellen:

1. Potenzen, deren Exponenten gerade Zahlen sind, können nur positiv seyn.

Denn da jede negative Zahl auf jeder Potenz, deren Exponent eine gerade Zahl ist, positiv ist, und positive Zahlen nie negative Potenzen geben, so kann es keine negative Potenz geben, deren Exponent eine gerade Zahl wäre.

Man nennt deßhalb solche Potenzen imaginaere Zahlen, und wenn sich daher als Resultat einer Aufgabe eine solche Potenz ergibt, so ist dieß ein Beweis, daß die Grundannahme der Aufgabe falsch sey.

2. Potenzen, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, können positiv oder negativ seyn.

m. Kein ächter Bruch gibt, auf irgend eine Potenz erhoben, eine ganze Zahl.

Der Beweis folgt daraus, weil das Produkt ächter Brüche immer kleiner ist, als jeder der Faktoren. Es sey daher $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch, wo $a < b$ und folglich $\frac{a}{b} < 1$. Erhebt man $\frac{a}{b}$ auf die 2. Potenz, nämlich $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, so ist $\frac{a^2}{b^2} < \frac{a}{b}$ und folglich auch kleiner als 1; eben so ist $\frac{a^3}{b^3} < \frac{a^2}{b^2} < \frac{a}{b} < 1$ u. s. w. also auch $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ kleiner als 1 und folglich keine ganze Zahl.

n. Wurzelziehen heißt, die Wurzel, das ist,

einen der gleichen Faktoren einer gegebenen Potenz bestimmen.

Sollte man z. B. aus 36, als dem gegebenen Quadrate, einen der gleichen Faktoren bestimmen, so hieße dieß, man soll aus der Zahl 36 die Quadratwurzel ziehen.

o. Einen der zwey gleichen Faktoren einer gegebenen Potenz bestimmen, heißt die Wurzel des zweyten Grades oder Quadratwurzel ziehen.

p. Einen der drey gleichen Faktoren einer gegebenen Potenz bestimmen heißt, Wurzel des dritten Grades oder Cubikwurzel finden.

q. Einen der vier, fünf .... n gleichen Faktoren einer gegebenen Potenz bestimmen, heißt die Wurzel des vierten, fünften .... nten Grades finden.

r. Die Zahl, welche anzeigt, von wie viel gleichen Faktoren der gegebenen Zahl man einen bestimmen, oder des wievielten Grades Wurzel man finden soll, heißt Wurzelexponent.

Soll man z. B. aus der Zahl 343 die Wurzel des dritten Grades finden, so ist 3 der Wurzelexponent.

s. Wurzelexponenten werden innerhalb des Wurzelzeichens $\sqrt{}$, welches derjenigen Zahl, aus welcher die Wurzel bestimmt werden soll, vorgesetzt wird, angeschrieben.

Sollte man z. B. aus der Zahl 7776 die Wurzel des fünften Grades bestimmen, so würde dieß auf folgende Art angezeigt werden: $\sqrt[5]{7776}$.

t. Soll aus einem zusammengesetzten Ausdrucke oder aus einem Bruche Wurzel gezogen werden, so wird dieß angezeigt, indem man denselben einschließt, und links vor das Einschließungszeichen das Wurzelzeichen vorsetzt.

Sollte man z. B. aus der Zahl 3 a — 4 b oder aus dem

Bruche $\frac{5}{7}$ die Cubikwurzel bestimmen, so würde dieß so angezeigt werden: $\sqrt[3]{(3a-4b)}$ und $\sqrt[3]{(\frac{5}{7})}$.

u. Aus einem Bruche wird jede Wurzel bestimmt, wenn man sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner die Wurzel des gegebenen Grades bestimmt.

v. Jede Wurzel, deren Exponent eine gerade Zahl ist, aus einer positiven Zahl gezogen, ist positiv oder negativ.

So ist z. B. die Wurzel des 2ten, 4ten, 6ten und allgemein des 2nten Grades aus $+a^x$ positiv oder negativ. Der Beweis folgt daraus, weil jede positive und negative Zahl auf jeder Potenz, deren Exponent eine gerade Zahl ist, wieder eine positive Zahl gibt, wie dieß in den Sätzen k und l dieses Abschnittes erklärt ist. Daher ist $\sqrt[2]{+9} = \pm 3$, $\sqrt[4]{+16} = \pm 2$, $\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}$.

w. Jede Wurzel, deren Exponent eine ungerade Zahl ist, aus einer negativen Zahl gezogen, ist negativ, und aus einer positiven Zahl positiv.

So ist z. B.

$$\sqrt[3]{-125} = -5,\ \sqrt[5]{-32} = -2,\ \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a};$$

eben so ist $\sqrt[3]{+216} = +6$, $\sqrt[7]{+128} = +2$, $\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}$, denn vermög dem Satze l gibt jede negative Zahl auf jeder Potenz, deren Exponent eine ungerade Zahl ist, eine negative Zahl, dagegen jede positive Zahl auf jeder Potenz, folglich auch, deren Exponent eine ungerade Zahl ist, eine positive Zahl.

I. Von Potenzen.

A. Allgemeine Zahlen.

a. Da das Potenziren nichts anderes, als eine besondere Art des Multiplizirens ist, und die Multiplikation in allgemeinen Zahlen nicht wirklich vollbracht, sondern nur angezeigt werden kann; so können auch allgemeine Zahlen nicht wirklich auf irgend eine Potenz erhoben, sondern die verlangte Potenz derselben nur angezeigt werden, wobey jedoch die bereits erklärten Abkürzungen allemal nach Zulassung in Anwendung gebracht werden.

Sollte z. B. a b auf die sechste Potenz erhoben werden, so wird dieß nach den bereits erklärten Regeln der Multiplikation auf folgende Art angezeigt werden: $(ab)^6 = ab \times ab \times ab \times ab \times ab \times ab = abababababab = aaaaaabbbbbb = a^6 b^6$.

b. Hat die allgemeine Zahl einen Coeffizienten, so wird dieser ebenfalls nach den Regeln für besondere Zahlen auf die gegebene Potenz erhoben.

Sollte man z. B. die Zahl 6 a auf die fünfte Potenz erheben, so ist $(6a)^5 = 6a \times 6a \times 6a \times 6a \times 6a = 7776a^5$.

c. Jede eingliedrige Zahl (monom) oder jeder einfache Ausdruck gibt auf jede Potenz erhoben, wieder nur einen einfachen Ausdruck.

So ist z. B. $(+a)^2 = +a \times +a = aa = a^2$, $(+a)^3 = +a. +a. +a = aaa = a^3$, $(+a)^n = +a. +a. +a \ldots$ nmal $= a^n$.

d. Das Quadrat jeder zweytheiligen Zahl (binom) enthält drey Glieder, nämlich: das Quadrat des ersten Theiles, das doppelte Produkt des ersten und zweyten Theiles, und das Quadrat des zweyten Theiles.

So ist z. B. $(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

e. Das Quadrat jeder mehrtheiligen Zahl (polynom) enthält die Quadrate eines jeden Theiles und die doppelten Produkte eines jeden Theiles mit jedem Theile.

Denn da vermög der Multiplikation zusammengesetzter Ausdrücke jeder Theil des einen Faktors mit jedem Theile des andern Faktors multiplizirt werden muß, und beym Potenziren die Faktoren immer dieselben Theile enthalten; so muß hier bey der zweyten Potenz jeder Theil einmal mit sich selbst, und einmal mit jedem der andern Theile multiplizirt werden, und es kömmt folglich die zweyte Potenz eines jeden Theiles nur einmal, hingegen das Produkt eines jeden Theiles mit jedem Theile zweymal vor. Z. B.

$(a + d + c + d)^2 = (a + b + c + d) \times (a + b + c + d) =$
$(a + b + c + d) \times a = a^2 + ab + ac + ad$
$(a + b + c + d) \times b = ab + b^2 + bc + bd$
$(a + b + c + d) \times c = ac + bc + c^2 + cd$
$(a + b + c + d) \times d = ad + bd + cd + d^2$

$= a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$.

Eben so allgemein

$(a + b + c + d + \ldots n)^2 = (a + b + c + d \ldots n) \times (a + b + c + d \ldots n) =$
$(a + b + c + d + \ldots n) \times a = a^2 + ab + ac + ad + a \times \ldots n$
$(a + b + c + d + \ldots n) \times b = ab + b^2 + bc + bd + b \times \ldots n$
$(a + b + c + d + \ldots n) \times c = ac + bc + c^2 + cd + c \times \ldots n$
$(a + b + c + d + \ldots n) \times d = ad + bd + cd + d^2 + d \times \ldots n$
$(a + b + c + d + \ldots n) \times n = an + bn + cn + dn + n \times \ldots n$.

f. Der Cubus jeder zweytheiligen Zahl enthält:

1. Den Cubus des ersten Theiles.

2. Das dreyfache Quadrat des ersten Theiles multiplizirt mit dem zweyten.

3. Das dreyfache Quadrat des zweyten Theiles mit dem ersten.

4. Den Cubus des zweyten Theiles. Z. B.

$(a + b)^3 = (a + b) \times (a + b) \times (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \times (a + b) =$

$(a^2 + 2ab + b^2) \times a = a^3 + 2a^2b + ab^2$

$(a^2 + 2ab + b^2) \times b = a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

g. Der Cubus jeder dreytheiligen Zahl enthält: 1. Den Cubus eines jeden Theiles.

2. Das dreyfache Quadrat eines jeden Theiles mit jedem Theile.

3. Das dreyfache Produkt eines jeden Theiles mit dem Quadrate eines jeden Theiles.

4. Das sechsfache Produkt aller drey Theile. z. B. $(a + b + c)^3 = (a + b + c) \times (a + b + c) \times (a + b + c) = (a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2) \times (a + b + c) =$

$(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2) \times a = a^3 + 2a^2b + 2a^2c + ab^2 + 2abc + ac^2$

$(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2) \times b = a^2b + 2ab^2 + 2abc + b^3 + 2b^2c + bc^2$

$(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2) \times c = a^2c + 2abc + 2ac^2 + b^2c + 2bc^2 + c^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 + 6abc.$

h. Der Cubus jeder mehrtheiligen Zahl enthält:

1. Den Cubus eines jeden Theiles.

2. Das dreyfache Quadrat eines jeden Theiles mit jedem Theile.

3. Das dreyfache Produkt eines jeden Theiles mit dem Quadrate eines jeden Theiles.

4. Die sechsfachen Produkte von je drey Theilen.

i. Man erhält die dritte Potenz einer gegebenen Zahl, indem man die zweyte Potenz derselben mit der gegebenen Zahl multiplizirt.

So ist z. B. $(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \times (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

k. Die vierte Potenz einer gegebenen Zahl erhält man, indem man die zweyte Potenz derselben mit der zweyten Potenz multiplizirt.

So ist z. B. $(a + b)^4 = (a + b)^2 \times (a + b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) \times (a^2 + 2ab + b^2) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 \times b^4$: denn $(a + b)^4 = (a + b) \times (a + b) \times (a + b) \times (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \times (a + b) \times (a + b) = (a^3 + 3a^2b + b^3) \times (a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

l. Die sechste Potenz erhält man, indem man die dritte Potenz der gegebenen Zahl mit der dritten Potenz derselben multiplizirt.

So ist z. B. $(a + b)^6 = (a + b)^3 \times (a \times b)^3 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \times (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. Der Beweis wie vorhin.

So würde man durch fortgesetzte Multiplikation jede der folgenden Potenzen erhalten.

Da jedoch dieses Verfahren beschwerlich und die Multiplikation besonders bey mehrgliedrigen Zahlen mit jeder Potenz mühsamer wird, so ist es vortheilhaft, allgemeine Formeln zu bestimmen, mittelst deren man jede Potenz jeder gegebenen zwey- oder mehrgliedrigen Zahl ohne vorhergegangene Multiplikation entwickeln kann.

Eine solche Formel (Binomialformel) für zweygliedrige Zahlen hat bereits der englische Mathematiker Newton erfunden.

Um die Gesetze, welche bei der Potenzirung eines Binoms herrschen, und nach welchen diese Formel entwickelt wurde, anschau-

licher darzustellen, wollen wir einige Potenzen des Binoms a + b hier ansetzen.

$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,ab^4 + b^5$

$(a + b)^6 = a^6 + 6\,a^5\,b + 15\,a^4\,b^2 + 20\,a^3\,b^3 + 15\,a^2\,b^4 + 6\,ab^5 + b^6$.

Betrachtet man diese Potenzen, so ergeben sich folgende Bemerkungen:

1. Jede Potenz des Binoms hat 1 Glied mehr, als der Exponent derselben Einheiten hat.

So hat z. B. die zweyte Potenz 3, die dritte Potenz vier, die vierte Potenz fünf, und folglich allgemein die nte Potenz n + 1 Glieder.

2. Die Summe der Exponenten in jedem Gliede ist gleich dem gegebenen Potenzexponenten.

So ist z. B. bei der 3. Potenz in dem Gliede $3\,a^2\,b$ die Summe der Exponenten gleich 3; denn a hat den Exponenten 2, b den Exponenten 1, der jedoch nie angeschrieben wird, folglich in $3\,a^2\,b^1$ die Summe der Exponenten = 3. Eben so ist bey der fünften Potenz in dem Gliede $10\,a^2\,b^3$ die Summe der Exponenten gleich 5.

3. Die Exponenten des ersten Theiles nehmen bey jedem folgenden Gliede um eine Einheit ab, bis der letzte Exponent desselben 0 ist, während der Exponent des zweyten Theiles von 0 angefangen in jedem Gliede um eine Einheit zunimmt, bis er den gegebenen Potenzexponenten gleich ist.

So ist in der fünften Potenz $a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,ab^4 + 6^5$ die Exponentenreihe folgende:

von a = 5, 4, 3, 2, 1, 0

von b = 0, 1, 2, 3, 4, 5; denn, wie wir später beweisen werden, ist $a^0 = 1$ und eben so $b^0 = 1$; und es wären die Potenzexponenten vollkommen angeschrieben eigentlich folgende:

$a^5\,b^0 + 5\,a^4\,b^1 + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a^1\,b^4 + a^0\,b^5$,

wo dann da $b^0 = 1$ und $a^0 = 1$, und da der Exponent 1, so wie der Coeffizient 1 nicht angeschrieben werden, die obige einfachere Form zum Vorschein kömmt.

4. Bezeichnet man die Glieder der Potenz eines Binoms nach der Reihe das erste mit 1 und jedes folgende um eine Einheit höher, so ergibt sich daraus, daß der Exponent des zweyten Theiles in jedem Gliede um eine Einheit kleiner sey, als die Ordnungszahl, das ist die Zahl, welche anzeigt, das wievielte Glied dasselbe sey.

Z. B. Man setze unter die sechste Potenz von $a + b$ die Ordnungszahlen 1, 2, 3 u. s. w., so ist:

$$a^6 + 6\,a^5 b + 15\,a^4 b^2 + 20\,a^3 b^3 + 15\,a^2 b^4 + 6\,ab^5 + b^6 \text{ oder}$$
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

deutlicher:

$$a^6 b^0 + 6\,a^5 b^1 + 15\,a^4 b^2 + 20\,a^3 b^3 + 15\,a^2 b^4 + 6\,a^1 b^5 + a^0 b^6,$$
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

in jedem Gliede die Ordnungszahl um eine Einheit größer, als der Exponent des zweyten Theiles, nämlich b.

Hiedurch ist man in Stand gesetzt, die Exponenten für jedes Glied zu bestimmen, ohne die ganze Reihe der Glieder aufschreiben zu müssen. Sollte man z. B. die Exponenten für das dritte Glied der fünften Potenz von $a + b$ finden, so ist erstens der Exponent des zweyten Theiles, nämlich 6 für dieses Glied $3 - 1$, folglich 2; und da die Summe der Exponenten in jedem Gliede dem gegebenen Potenzexponenten gleich seyn muß, so ist der Exponent von a für dieses Glied $= 3$, denn $2 + 3 = 5$ und es sind also die Exponenten von $(a + b)^5$ im dritten Gliede $= a^3 b^2$.

5. Der Coeffizient des ersten Gliedes in jeder Potenz ist 1; der des zweyten Gliedes immer gleich dem Exponenten der gegebenen Potenz. Der Coeffizient eines jeden der folgenden Glieder aber wird gefunden, wenn man den Coeffizienten des vorangehenden Gliedes durch den Coeffizienten von a desselben Gliedes multiplizirt, und durch den Coeffizienten von b in dem zu bestimmenden Gliede dividirt.

So ist z. B. in der sechsten Potenz

$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

der Coeffizient des ersten Gliedes = 1,

= = = zweyten Gliedes = 6,

= = = dritten Gliedes = $\frac{6 \times 5}{2}$

das heißt, dem Coeffizienten 6 des vorangehenden Gliedes, multiplizirt mit dem Exponenten 5 von a in demselben Gliede, und getheilt durch den Coeffizienten 2 von 6 in dem gesuchten Gliede.

Der Coeffizient des vierten Gliedes = $\frac{15 \times 4}{3}$

= = = fünften = = $\frac{20 \times 3}{4}$ u. s. w.

Drückt man diese Regeln allgemein aus, indem man den Exponenten der zu bestimmenden Potenz mit n bezeichnet, so werden dieselben folgender Maßen ausgesprochen werden:

m. Jedes Binom auf die nte Potenz erhoben, hat n + 1 Glied.

n. Die Exponenten eines Binoms (a + b) für jedes Glied x einer gegebenen Potenz n sind = $a^{n-(x-1)}b^{x-1}$, wo x die Ordnungszahl ausdrückt.

Der Beweis erhellt aus dem bereits Vorgetragenen. Denn wenn das Glied zur Ordnungszahl x hat, so ist der Exponent von b = x — 1, das heißt, der Exponent von b ist um eine Einheit kleiner als die Ordnungszahl des Gliedes. Da ferner die Summe der Exponenten in jedem Gliede dem gegebenen Potenzexponenten gleich ist, so muß auch hier der Exponent von a und b zusammen dem Exponenten n gleich seyn. Der Exponent von b ist = x — 1, folglich ist der Exponent von a = n — (x — 1); denn n — (x — 1) + (x — 1) = n. Mittelst dieser Formel kann man die Exponenten für jedes Glied eines Binoms in jeder Potenz bestimmen. Z. B. Man sollte die Exponenten von a + b im sechsten Gliede der siebenten Potenz bestimmen, so ist n = 7, x = 6 und folglich die Exponenten $a^{7-(6-1)}b^{6-1} = a^2b^5$.

o. Der Coeffizient eines jeden Gliedes x des

Binoms $a + b$ in der nten Potenz ist im ersten Gliede 1, in allen übrigen aber $= \frac{n}{1} \times \left(\frac{n-2}{3}\right) \times \left(\frac{n-3}{4}\right) \times \left(\frac{n-3}{4}\right) \times \ldots \left(\frac{n-(x-2)}{x-1}\right)$; denn schreibt man die Potenz n des Binoms $a + b$ an, nämlich ohne die Coeffizienten: $a^n + a^n \cdot {}^{-1}b^{n-(n-1)} + a^n \cdot {}^{-2}b^{n-(n-2)} + a^n \cdot {}^{-3}b^{n-(n-3)} + a^n \cdot {}^{-4}b^{n-(n-3)}$ u. s. w., so ist, nach der früher gegebenen Regel über die Bestimmung der Coeffizienten, der Coeffizient des ersten Gliedes $\frac{n}{n} = 1$; der Coeffizient des zweyten Gliedes $= 1 \times \frac{n}{n-(n-1)}$ oder $\frac{n}{1} = n$, da $n - (n-1) = 1$ ist; der Exponent des dritten Gliedes ist $= n \times \frac{n-1}{n-(n-2)}$ oder, da $n - (n-2) = 2$, auch $n \times \left(\frac{n-1}{2}\right)$, eben so der Exponent des vierten Gliedes $= n \times \left(\frac{n-1}{2}\right) \times \left(\frac{n-2}{3}\right)$ u. s. w. Setzt man diese Coeffizienten mit den entsprechenden Ordnungszahlen an, nämlich:

1. Glied $= \frac{n}{n} = 1$
2. " $= \frac{n-0}{1} = \frac{n}{1}$
3. " $= \left(\frac{n-1}{2}\right)$
4. " $= \left(\frac{n-1}{2}\right) \times \left(\frac{n-2}{3}\right)$
5. " $= \left(\frac{n-1}{2}\right) \times \left(\frac{n-2}{3}\right) \times \left(\frac{n-3}{4}\right)$

u. s. w., so sieht man daraus, daß in jedem Gliede ein Faktor weniger vorkömmt, als die entsprechende Ordnungszahl Einheiten enthält; daß mit jedem Gliede ein neuer Faktor zuwächst, in welchem von den gegebenen Potenzexponenten jedesmal eine Zahl subtrahirt wird, die um zwey Einheiten kleiner ist, als die Ordnungszahl des Gliedes, und welcher Faktor dann noch durch eine Zahl

dividirt wird, die um eine Einheit kleiner ist, als eben dieselbe Ordnungszahl. Ist daher die Ordnungszahl x, so werden $x-1$ Faktoren vorkommen, der letzte Faktor wird $\left(\frac{n-(x-2)}{x-1}\right)$ und folglich der ganze Coeffizient von dem Gliede $x = \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{2}\right) \times \left(\frac{n-2}{3}\right) \times \left(\frac{n-3}{4}\right) \times \ldots \left(\frac{n-(x-2)}{x-1}\right)$ seyn.

Mittelst dieser Formel kann man den Coeffizienten für jedes Glied des Binoms in jeder Potenz bestimmen. Man sollte z. B. den Coeffizienten eines Binoms für das 4te Glied der sechsten Potenz bestimmen, so ist $n = 6$, $x = 4$ und der Coeffizient $= 6\left(\frac{6-1}{2}\right)\left(\frac{6-2}{3}\right) = 6 \times \left(\frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{4}{3}\right) = 20$.

p. Das erste Glied der nten Potenz eines Binoms ist a^n, jedes andere Glied aber ist $= \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right) \times \ldots \left(\frac{n-(x-2)}{x-1}\right) a^{n-(x-1)} \cdot b^{x-1}$.

Denn da der Coeffizient eines jeden Gliedes $x = n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right) \times \ldots \left(\frac{n-(x-2)}{x-1}\right)$, und die Exponenten für jedes Glied $x = a^{n-.(x-1)}b^{x-1}$, so ist folglich das ganze Glied $x = \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{1}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right) \ldots \left(\frac{n-(x-2)}{x-1}\right) a^{n-(x-1)} \times b^{x-1}$.

Mittelst dieser Formel kann man nun jedes Glied einer Potenz eines gegebenen Binoms bestimmen. Sollte man z. B. das vierte Glied der siebenten Potenz bestimmen, so ist $n = 7$, $x = 4$ und folglich das verlangte Glied $7\left(\frac{7-1}{2}\right)\left(\frac{7-2}{3}\right) a^{7-.(4-1)}b^{4-1} = 35\, a^4 b^3$.

Allein diese Formel dient eigentlich nur zur Bestimmung der Glieder eines Binoms, und man kann zwar mit Hilfe derselben auch jede Potenz eines Polynoms jedoch nur so entwickeln, indem

man dasſelbe als ein Binom betrachtet. Z. B. Man ſollte das Polynom a + b + c nach der Binomialformel auf die dritte Potenz erheben, ſo könnte dieß geſchehen, indem man z. B. (a + b) als einen Theil, und c als den zweyten Theil betrachtet, nämlich: $(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 + c^3$, nun vollbringe man die angezeigten Verrichtungen wirklich, nämlich: $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3(a^2 + 2ab + b^2)c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + 3a^2 c + 6abc + b^3 + 3b^2 c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. Bey dieſem Verfahren entgeht man jedoch keineswegs den vielen und zeitraubenden Multiplikationen.

Wir wollen daher auch eine Formel für jede Potenz eines jeden Polynoms entwickeln, und um dieß deſto anſchaulicher darzuſtellen, einige Potenzen des Polynoms a + b + d + c ganz oder theilweiſe anſetzen.

$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + 2ab + 2ae + 2ad + 2ae + b^2 + 2bc + 2bd + 2be + c^2 + 2cd + 2ce + d^2 + 2de + e^2$.

$(a + b + c + d + e)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3a^2 c + 3a^2 d + 3a^2 e + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 + 3ae^2 + b^3 + 3b^2 c + 3b^2 d + 3b^2 e + 3be^2 + 3bd^2 + 3be^2 + c^3 + 3c^2 d + 3c^2 e + 3cd^2 + 3ce^2 + d^3 + 3d^2 e + 3de^2 + e^3 + 6abc + 6abd + 6abe + 6acd + 6ace + 6ade + 6bcd + 6bca + 6bde + 6cde$.

$(a + b + c + d + e)^4 = a^4 + 4a^3 b + 4a^3 c \ldots + 6a^2 b^2 + 6a^2 c^2 \ldots + 12a^2 bc + 12a^2 bd + \ldots + 4ab^3 + 4ac^3 \ldots + b^4 + 4b^3 c + 4b^3 d \ldots + 6b^2 c^2 \ldots 12b^2 cd \ldots + c^4 + \ldots + d^4 \ldots + e^4 + 24abcd + 24abce \ldots$

$(a + b + c + d + e)^5 = a^5 + 5a^4 b + 5a^4 c \ldots + 10a^3 b^2 + 10a^3 c^2 \ldots + 20a^3 bc + 20a^3 be \ldots + 30a^2 b^2 c + 30a^2 b^2 d + 30a^2 b^2 e \ldots + 60a^2 bcd \ldots + 120abcde + b^5$ u. ſ. w.

Bey der Betrachtung dieſer Potenzen ergeben ſich folgende Bemerkungen:

1. Die Summe der Exponenten in jedem Gliede iſt dem gegebenen Potenzexponenten gleich.

So ist z. B. in dem Gliede 60 a^2bcd die Summe der Exponenten von a^2, b^1, c^1, $d^1 = 5$, das ist, dem gegebenen Potenzexponenten.

2. Jeder Theil des gegebenen Polynoms kömmt mit dem gegebenen Potenzexponenten n und mit jedem der immer um 1 verminderten Exponenten vor. So kömmt z. B. in der fünften Potenz a^5, a^4, a^3 u. s. w., eben so b^5, b^4, b^2 u. s. w. vor.

3. Jeder Theil kömmt mit jedem Theile unter jedem möglichen Exponenten der gegebenen Potenz verbunden vor.

So kömmt z. B. in der vierten Potenz a^4 mit b^0 vor, denn $a^4 b^0 = a^4$ da $b^0 = 1$; dann a^3 mit b^1, a^2 mit b^2, a^1 mit b^3, a^0 mit b^4; eben so a^3 mit c^1, a^2 mit c^2 u. s. w.

4. In jeder Potenz kommen Glieder von 1 und 2; von 1, 2 und 3; von 1, 2, 3 und 4, u. s. w. Theilen vor, je nachdem der gegebene Potenzexponent 2, 3, 4 u. s. w. Einheiten hat.

So kommen z. B. bey der vierten Potenz Glieder von 1, 2, 3, 4 Theilen vor, z. B. a^4, a^3b, a^2bc, $abcd$ u. s. w.

5. Die Anzahl der Glieder nimmt bey jedem Polynom für jede Anzahl der gegebenen Theile nach einer andern arithmetischen Reihe zu.

So hat ein Polynom von 2 Theilen in der 2. Potenz 3 Glieder
= = 3. = 4 =
= = 4. = 5 =
= = 5. = 6 u. s. w.

Ein Polynom von 3 Theilen . . in der 2. Potenz 6 Glieder
= = 3. = 10 =
= = 4. = 15 =
= = 5. = 21 u. s. w.

Ein Polynom von 4 Theilen . . in der 2. Potenz 10 Glieder
= = 3. = 20 =
= = 4. = 35 =
= = 5. = 56 u. s. w.

5. Der kleinste Coeffizient ist 1, und der größte ist ein Produkt aus allen Exponenten vom höchsten gegebenen bis zur Einheit.

So ist z. B. bey der sechsten Potenz der kleinste Coeffizient 1, der größte 1. 2. 3. 4. 5. 6. = 720.

Nach diesen vorläufigen Bemerkungen wollen wir zur Bestimmung einer allgemeinen Regel für die Potenzirung jedes Polynoms schreiten.

Um jedes gegebene Polynom ohne Verrichtung der Multiplikation oder des eigentlichen Potenzirens auf jede mögliche Potenz zu erheben, muß man drey Dinge wissen, nämlich:

1. Wie viel Glieder die zu bestimmende Potenz des gegebenen Polynoms haben werde.

2. Welches die Exponenten der einzelnen Glieder, und

3. Welches die Coeffizienten derselben seyen.

Wir haben bereits erklärt, daß die Anzahl der Glieder eines Polynoms für jede Anzahl der gegebenen Theile nach einer andern arithmetischen Reihe zunehme. Da wir jedoch die Lehre von arithmetischen Reihen noch nicht vorgetragen haben, so wollen wir hier bloß die allgemeine Formel für die Bestimmung der Anzahl der Glieder angeben, und die Entwicklung dieser Formel später nachholen, nämlich:

9. Die Anzahl der Glieder für jedes Polynom von x Theilen in der nten Potenz ist:

$$(n+1) \times \left(\frac{n+2}{2}\right)\left(\frac{n+3}{3}\right) \times \ldots \left(\frac{n \times (x-1)}{x-1}\right)$$

Hätte z. B. das Polynom 5 Theile, und man sollte die Anzahl der Glieder für die dritte Potenz bestimmen, so ist $n = 3$ und $x = 5$, folglich die Anzahl der Glieder dieser Potenz $(3+1)\left(\frac{3+2}{2}\right)\left(\frac{3+3}{3}\right)\left(\frac{3+4}{4}\right)$, da nämlich $x - 1 = 4$ ist folglich abgekürzt $4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{7}{4} = 35$; das heißt, die vierte Potenz eines fünftheiligen Polynoms wird 35 Glieder haben. Da

wir ferner schon bemerkt haben, daß jeder Theil des gegebenen Polynoms sowohl mit dem höchsten gegebenen Potenzexponenten, als auch mit jedem der nächst folgenden um eine Einheit verminderten Exponenten, und in Verbindung mit jedem der übrigen Theile ebenfalls unter jedem möglichen Exponenten der gegebenen Potenz vorkomme, wobey jedoch die Summe der Exponenten jedesmal dem gegebenen Exponenten der Potenz gleich seyn muß; daß ferner jede Potenz eines Polynoms Glieder von 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4. u. s. w. Theilen enthalte, je nachdem der gegebene Potenzexponent 2, 3, 4 u. s. w. Einheiten enthält; so läßt sich für die Bestimmung der Exponenten eines Polynoms folgende Regel aufstellen:

1. Man setze jeden Theil des gegebenen Polynoms nur einmal mit dem höchsten Exponenten der gegebenen Potenz an, dann aber auch unter jedem der nächst folgenden um eine Einheit verminderten Exponenten mit je einem, zwey, drey oder n Theilen des gegebenen Polynoms ebenfalls unter jedem möglichen Exponenten der gegebenen Potenz in Verbindung, doch so, daß die Summe der Exponenten immer dem gegebenen Potenzexponenten gleich ist.

Um dieß desto leichter und richtiger zu erzielen, ist es gut, mit dem ersten Theile anzufangen, und denselben mit jedem der nächst folgenden Theile in Verbindung zu setzen, hierauf den zweyten Theil vorzunehmen und denselben mit jedem der folgenden Theile zu verbinden, und so bis zum Schlusse fortzufahren. Am deutlichsten wird dieß durch ein Beispiel werden. Man sollte z. B. das Polynom $(a + b + c + d + e)$ auf die fünfte Potenz erheben, und die Exponenten für die einzelnen Glieder bestimmen, so wird dieß auf folgende Art geschehen:

a^5 $a^4 b$, $a^4 c$, $a^4 d$, $a^4 e$ — $a^3 bc$, $a^3 bd$, $a^3 be$, $a^3 cd$, $a^3 ce$, $a^3 de$ — $a^3 b^2$, $a^3 c^2$, $a^3 d^2$, $a^3 e^2$ — $a^2 bcd$, $a^2 bce$, $a^2 bde$, $a^2 cde$ — $a^2 b^2 c$, $a^2 b^2 d$, $a^2 b^2 e$ — $a^2 bc^2$, $a^2 c^2 d$, $a^2 c^2 e$, — $a^2 bd^2$, $a^2 cd^2$, $a^2 d^2 e$ — $a^2 be^2$, $a^2 ce^2$, $a^2 de^2$ — $ab^3 c$ =

ab^3d, ab^2e — abc^2, ac^2d, ac^3e — ad^2b, acd^2, ad^3e — abe^2 ace^2, ade^2 — ab^4, ac^4, ad^4, ae^4.
b^5 — b^4c, b^4d, b^4e — b^3cd u. f. w.
c^5 — c^4d, c^4e — c^3de u. f. w.
d^5 — d^4e u. f. w. endlich e^5.

8. Was endlich die Bestimmung der Coeffizienten eines Polynoms für jede Potenz n betrifft, beobachte man folgende Regeln:

1. Jedes Glied mit dem Exponenten n hat 1 zum Coeffizienten.

2. Um den Coeffizienten eines jeden der übrigen Glieder zu bestimmen, multiplizire man den höchsten Exponenten dieses Gliedes, nachdem man ihn um eine Einheit vermehrt hat, mit jedem der nächst höhern Exponenten bis einschlüssig zum Exponenten n, und dividire dieses Produkt durch dasjenige Produkt, welches man erhält, wenn man jeden der übrigen Exponenten dieses Gliedes mit allen nächst niedrigen Exponenten bis zur Einheit herab multiplizirt, und diese Produkte wieder unter einander multiplizirt.

Z. B. Man sollte den Coeffizienten für das Glied $a^4b^3c^2$ der neunten Potenz von $a + b + c$ bestimmen, so würde man erstens den höchsten Exponenten 4 um eine Einheit vermehren, nämlich $4 + 1 = 5$ und sodann diesen mit allen nächst höhern Exponenten bis einschlüssig zum gegebenen Exponenten der Potenz, hier 9, multipliziren, nämlich $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 15120$; sodann jeden der übrigen Exponenten dieses Gliedes, nämlich 3 und 2 mit jedem der nächst niedrigen bis zur Einheit, also 3 mit 2 und 1, und 2 mit 1 multipliziren, nämlich $3 \times 2 \times 1 = 6$ und $2 \times 1 = 2$, hierauf diese Produkte unter sich multipliziren, nämlich $6 \times 2 = 12$ und endlich durch dasselbe das erste Produkt dividiren, nämlich: $15120 : 12 = 1260$, und es wäre folglich der Coeffizient von $a^4\ b^3\ c = 1260$. Oder man sollte den Coeffizienten für das Glied $a^5b^4c^3$ der zwölften Potenz von $a + b + c$ bestimmen, so wird man zuerst 5 um 1 vermehren,

nämlich 5 + 1 = 6 und hierauf 6 mit 7, 8, 9, 10, 11 und 12 multipliziren, nämlich: 6 × 7 × 8 × 9 × 10 × 11 × 12 = 3991680; hierauf jeden der übrigen Faktoren, nämlich 4 und 3 mit allen niedrigen Exponenten bis zur Einheit, und diese einzelnen Produkte auch noch unter einander multipliziren, nämlich: 4 × 3 × 2 × 1 = 24, 3 × 2 × 1 = 6, sodann 24 × 6 = 144; endlich das erste Produkt durch dieses letztere dividiren, nämlich 3991680 : 144 = 27720 und es ist also der Coeffizient von $a^5 b^4 c^3$ = 27720. Allgemein läßt sich diese Regel so ausdrücken:

Der Coeffizient eines jeden Gliedes der nten Potenz eines Polynoms ist =

$$\frac{(\text{Coef. a} + 1) \times (a + 2)(a + 3) \times \ldots\ldots (n)}{(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \text{Coef. b}) \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \text{Coef. c}) \times (1 \times 2 \times 3 \times \ldots (\text{Coef. d})}$$

u. s. w.

wo der Coeffizient a den höchsten Coeffizienten des gegebenen Gliedes b, c, d u. s. w. aber die übrigen Coeffizienten bezeichnen.

Anmerkung. Sollten in einem Gliede zwey oder mehrere gleiche Exponenten als die höchsten erscheinen, so wird nur einer davon als der höchste betrachtet und die übrigen den niedrigen gleich behandelt. So würde man z. B. in dem Gliede $a^3 b^3 c^2$, den einen der zwey gleichen Exponenten 3 als den höchsten annehmen, diesen um 1 vermehren, nämlich 4, und dann mit 5, 6, 7 und 8 multipliziren, da dieses Glied zur achten Potenz gehört, nämlich: 4 × 5 × 6 × 7 × 8 = 6720; hierauf mit den übrigen Exponenten 3 und 2 nach der Regel verfahren, nämlich: 3 × 2 × 1 = 6, 2 × 1 = 2 und 6 × 2 = 12; endlich 6720 durch 12 dividiren, nämlich: 6720 : 12 = 560, und es ist also 560 der Exponent von $a^3 b^3 c^2$.

Auch ist zu merken, daß die Ordnung der Exponenten keinen Unterschied in den Coeffizienten macht, und daß folglich $a^3 b^2 c$, $a b^3 c^2$, $a^2 b c^3$, $a^3 b c^2$, $a b^2 c^3$ und $a^2 b^3 c$ denselben Coeffizienten haben.

t. Faßt man alles dieß zusammen, so lassen sich für die Bestimmung der nten Potenz eines jeden Polynoms folgende Regeln aufstellen:

1. **Jedes Polynom von x Theilen hat in der**

nten Potenz $(n+1) \times \left(\frac{n+2}{2}\right) \times \left(\frac{n+3}{3}\right) \times \left(\frac{n+4}{4}\right) \times \ldots \ldots \left(\frac{n+(x-1)}{x-1}\right)$ Glieder.

2. Jede nte Potenz eines Polynoms enthält jeden Theil einmal mit dem Exponenten n, und jeden Theil unter jedem der nächst folgenden um 1 verminderten Exponenten in Verbindung mit je einem, zwey, drey u. s. w. der übrigen Theile ebenfalls unter jedem Exponenten derselben Potenz, doch so, daß die Summe der Exponenten in jedem Gliede dem gegebenen Potenzexponenten n gleich sey.

3. Der Coefficient eines jeden Gliedes der nten Potenz eines Polynoms ist:

$$\frac{(\text{Coef. a}+1) \times (a+2) \times (a+3) \times \ldots n}{(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \text{Coef. b}) \times (1 \times 2 \times 3 \times \ldots \text{Coef. c}) \times (1 \times 2 \times 3 \times \ldots \text{Coef. c}) \text{ u. s. w.}}$$

Durch Anwendung dieser drey Regeln ist man im Stande, jede Potenz eines gegebenen Polynoms ohne vorhergegangene Multiplikation zu bestimmen.

Z. B. Man sollte die siebente Potenz des Polynoms (a + b + c + d + e) bestimmen, so würde man erstens die Zahl der Glieder dieses Polynoms berechnen. Da nämlich dieses Polynom 5 Theile hat, so ist $n = 7$ und $x = 5$ und folglich, wenn man in der Formel $(n+1) \times \left(\frac{n+2}{2}\right)\left(\frac{n+3}{3}\right) \times \left(\frac{n+(x-1)}{x-1}\right)$ statt n, 7 — statt x, 5 — und statt $x-1$, 4 setzt, die Zahl der Glieder $= 7+1 \times \left(\frac{7+2}{2}\right) \times \left(\frac{7+3}{3}\right) \times \left(\frac{7+4}{4}\right) = 330$.

Die Exponenten würden in folgenden Verbindungen vorkommen 7. — 6. 1. — 5. 1. 1. — 5. 2. — 4. 1. 1. 1. — 4. 2. 1. — 4. 3. — 3. 1. 1. 1. 1. — 3. 2. 1. 1. — 3. 2. 2. — 3. 3. 1. — 2. 1. 1. 1. 1. 1. — 2. 2. 1. 1. 1. — 2. 2. 2. 1. — 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.

Die Coeffizienten endlich werden folgende seyn:

Für den Exponenten	Coeffizient
7.	1.
6. 1.	$\frac{7}{1} = 7$
5. 1. 1.	$\frac{6 \times 7}{1} = 42$
5. 2.	$\frac{6 \times 7}{2} = 21$
4. 1. 1. 1.	$\frac{5 \times 6 \times 7}{1.} = 210$
4. 2. 1.	$\frac{5 \times 6 \times 7}{2.} = 105$
4. 3.	$\frac{5 \times 6 \times 7}{3 \times 2} = 35$
3. 1. 1. 1. 1.	$\frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{1} = 870$
3. 2. 1. 1.	$\frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{2} = 420$
3. 2. 2.	$\frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{2 \times 2} = 210$
3. 3. 1.	$\frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{3 \times 2} = 140$
2. 1. 1. 1. 1. 1.	$\frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{1} = 2520$
2. 2. 1. 1. 1.	$\frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{2} = 1260$
2 2. 2. 1.	$\frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{2. 2.} = 630$
1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.	$\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{1} = 5040$

Nun würde man die einzelnen Glieder so anschreiben:

$a^7 + 7\,a^6\,b + 7\,a^6c + 7\,a^6d + 7\,a^6e + 42\,a^5bc + 42\,a^5bd + 42\,a^5cd \ldots\ldots + 21\,a^5c^2 + 21\,a^5c^2 \ldots\ldots + 210\,a^4bcd + 210\,a^4bce \ldots\ldots + 105\,a^4b^2c + 105\,a^4b^2d \ldots\ldots + 105\,a^4bc^2 + 105\,a^4c^2d \ldots\ldots$

$+ 105\ a^4d^2b \ldots + 105\ a^4e^2b \ldots + 35\ a^4b^3 + 35\ a^4c^3 \ldots + 840\ a^3bcde + 420\ a^3b^2cd \ldots + 420\ a^3c^2bd \ldots + 420\ a^3d^2bc \ldots + 420\ a^3e^2bc \ldots + 210\ a^3b^2c^2 + 210\ a^3b^2d^2 \ldots + 210\ a^3c^2d^2 \ldots + 140\ a^3b^3c \ldots + 140\ a^3c^3b \ldots + 140\ a^3d^3b \ldots + 140\ a^3d^3b + 140\ a^3e^3b \ldots + 35\ a^3b^4 + 35a^3\ c^4 \ldots$ (2520 kömmt nicht vor, da das gegebene Polynom nur fünf Theile hat, und zu dieſem Gliede ſechs Theile nothwendig ſind, indem in demſelben ſechs Exponenten vorkommen.) $+ 1260\ a^2b^2cde + 1260\ a^2bc^2de \ldots + 630\ a^2b^2c^2d \ldots 630\ a^2bc^2d^2 \ldots + 210\ a^2b^3c^2 + 210\ a^2b^3d^2 \ldots + 210\ a^2b^2c^3 \ldots + 210\ a^2b^2d^3 \ldots + 210\ a^2b^2e^3 \ldots + 105\ a^2b^4c + 105\ a^2b^4d \ldots + 105\ a^2bc^4 \ldots + 105\ a^2bd^4 \ldots + 105\ a^2be^4 \ldots + 21\ a^2b^5 + 21\ a^2c^5 \ldots$ (5040 kömmt ebenfalls nicht vor, da in dieſem Gliede ſieben Exponenten vorkommen und das gegebene Polynom nur fünf Theile hat.) $+ 1260\ ab^2c^2de + 1260\ ab^2cd^2e \ldots + 1260\ abc^2d^2e \ldots + 630\ ab^2c^2d^2 + 630\ ab^2c^2e^2 \ldots + 840\ ab^3cde + 840\ abc^3de \ldots + 420\ ab^3c^2e + \ldots 420\ ab^3cd^2 + 420\ ab^3ce^2 \ldots + 420\ ab^2c^3d \ldots + 420\ ab^2cd^3 + 420\ ab^3ce^3 \ldots + 420\ abc^2d^3 \ldots + 210\ ab^4cd \ldots + 210\ ab^4ce + 210\ abc^4d \ldots + 105\ ab^4c^2 \ldots + 105\ ac^4b^2 \ldots + 105\ ad^4b^2 \ldots + 105\ ae^4b^2 \ldots + 42\ ab^5c \ldots + 42\ ac^5b \ldots + 42\ ad^5b \ldots + 42\ ae^5b \ldots + 7\ ab^6 + 7\ ac^6 \ldots + b^7 + 7\ b^6c + 7\ b^6e \ldots + 42\ b^5cd \ldots + 21\ b^5c^2 \ldots + 210\ b^4cde + 105\ b^4c^2d \ldots + 105\ b^4d^2c \ldots + 105\ b^4e^2c \ldots + 35\ b^4c^3 \ldots + 420\ b^3c^2de + 420\ b^3cd^2e \ldots + 210\ b^4c^2d^2 \ldots + 140\ b^3c^3d \ldots + 140\ b^3cd^3 \ldots + 140\ b^3ce^3 + 35\ b^3c^4 \ldots + 630\ b^2c^2d^2e + 630\ b^2cd^2e^2 \ldots + 210\ b^2c^3d^2 \ldots + 210\ b^2c^2d^3 \ldots + 210\ b^2c^2e^3 \ldots + 105\ b^2c^4d \ldots + 105\ b^2cd^4 \ldots + 105\ b^2ce^4 \ldots + 21\ b^2c^5 + 21\ b^2d^5 \ldots + 630\ bc^2d^2e^2 + 420\ bc^3d^2e + 420\ bc^3de^2 \ldots + 140\ bc^3d^3 + 140\ bc^3e^3 \ldots + 105\ bc^4d^2 + 105\ bc^4e^2 + 105\ bd^4c^2 \ldots + 105\ be^4c^2 \ldots + 42\ bc^5d \ldots + 42\ bd^5c \ldots + 42\ be^5c \ldots + 7\ be^6 + 7\ bd^6 \ldots$

$+ c^7 + 7\,c^6d \ldots\ldots + 42\,c^5d^2 + 21\,c^5d^2 \ldots\ldots +$
$105\,c^4d^2e + 105\,c^4de^2 + 35\,c^4d^3 + 35\,c^4e^3 + 210\,c^3d^2e^2$
$140\,c^3d^3e + 140\,c^3de^3 + 35\,c^3d^4 + 35\,c^3e^4 + 210\,c^2d^3e^2$
$210\,c^2d^2e^3 + 105\,c^2d^4e + 105\,c^2de^4 + 21\,c^2d^5 + 21\,c^2e^5$
$+ 140\,cd^3e^3 + 105\,cd^4e^2 + 105\,cd^2e^4 + 42\,cd^5e +$
$42\,cde^5 + 7\,c^6d + 7\,c^6e + d^7 + 7\,d^6e + 21\,d^5e^2 +$
$35\,d^4e^3 + 35\,d^3e^4 + 21\,d^2e^5 + 7\,de^6 + e^7.$

Hier sind jedoch des Raumes wegen von den meisten Verbindungen nur einzelne Glieder angeführt.

B. Besondere Zahlen.

a. Die Einheit gibt auf jede Potenz erhoben wieder 1.

So ist z. B. $1^6 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1.$

Jede einziffrige Zahl gibt in der zweiten Potenz 1 oder 2 Ziffern; jede zweiziffrige Zahl hat in eben derselben Potenz 3 oder 4 Ziffern; jede dreiziffrige Zahl 5 oder 6 Ziffern u. s. w. Denn die kleinste einziffrige Zahl ist 1, und diese gibt, wie wir vorhin gezeigt haben, in jeder Potenz, und folglich auch im Quadrate 1, das ist eine einziffrige Zahl. Die größte einziffrige Zahl ist 9, und diese gibt im Quadrate 81, folglich eine zweiziffrige Zahl, und es müssen daher alle einziffrigen Zahlen zwischen 1 und 9 im Quadrate 1 oder 2 Ziffern geben.

Die kleinste zweiziffrige Zahl ist 10; diese gibt, auf das Quadrat erhoben, die Zahl 100, das ist, eine dreiziffrige Zahl; die größte zweiziffrige Zahl ist 99, diese gibt aufs Quadrat erhoben 9801, das ist, eine vierziffrige Zahl, und es müssen daher alle zweiziffrigen Zahlen zwischen 10 und 99, drei oder vier Ziffern geben u. s. w.

Stellt man sich nun diese Fälle zusammen, nämlich:

I. Alle 1ziffrigen Zahlen geben im Quadrate 1 oder 2 Ziffern.
II. = 2 = = = = = 3 = 4 =
III. = 3 = = = = = 5 = 6 =
IV. = 4 = = = = = 7 = 8 =

u. s. w., so sieht man, daß das Quadrat immer entweder doppelt soviel oder doppelt soviel weniger einer Ziffer habe, als die Wurzel, was man allgemein so ausdrücken kann:

b. Wenn die Wurzel n Ziffern hat, so hat das Quadrat 2n oder 2n — 1 Ziffern.

Wenn man z. B. die dreiziffrige Zahl 843 auf das Quadrat erhebt, so wird dasselbe entweder 2n = 6 oder 2n — 1 = 5 Ziffern haben, nämlich $(843)^2 = 710649$.

Eben so gibt jede einziffrige Zahl in der dritten Potenz 3, 2 oder 1 Ziffer, jede zweiziffrige Zahl gibt in der dritten Potenz 6, 5 oder 4 Ziffern, jede dreiziffrige Zahl 9, 8 oder 7 Ziffern u. s. w.

Stellt man diese Fälle zusammen, nämlich:

I. Alle 1ziffrigen Zahlen geben im Cubus 1, 2 oder 3 Ziffern,
II. = 2 = = = = = 4, 5 = 6 =
III. = 3 = = = = = 7, 8 = 9 =
IV. = 4 = = = = = 10, 11 = 12 =

u. s. w., so sieht man, daß der Cubus immer entweder dreimal so viel, oder dreimal soviel weniger 1, oder dreimal soviel weniger 2 Ziffern habe, als die Wurzel. Folglich allgemein:

c. Wenn die Wurzel n Ziffern hat, so hat der Cubus derselben 3n, 3n — 1 oder 3n — 2 Ziffern.

Wenn man z. B. die dreiziffrige Zahl 821 auf den Cubus erheben wollte, so wird dieselbe 3n = 9, oder 3n — 1 = 8 oder endlich 3n — 2 = 7 Ziffern haben, nämlich: $(821)^3 = 471287661$.

Eben so hat die vierte Potenz einer n ziffrigen Zahl 4n oder 4n — 1, oder 4n — 2 oder 4n — 3 Ziffern; die fünfte Potenz hat 5n oder 5n — 1, 5n — 2, 5n — 3 oder 5n — 4 Ziffern u. s. w. Daher allgemein:

d. Wenn die Wurzel n Ziffern hat, so hat die Potenz x derselben x.n, oder x.n — 1 oder x.n — 2, x.n — 3, oder ... x.n — (x — 1) Ziffern.

Jede mehrziffrige Zahl kann man sich nach der bereits früher gegebenen Anleitung in Theile zerlegen. So kann man sich z. B. die Zahl 364 in die Theile 300 + 60 + 4 zerlegen.

Wenn man eine so zerlegte Zahl auf irgend eine Potenz erhebt, so gibt dieselbe genau eben dieselben Theile, welche bei der Potenzirung eines Polynoms mit allgemeinen Zahlen bezeichnet worden

sind. Wollte man z. B. die oben gegebene Zahl 300 + 60 + 4 auf die dritte Potenz erheben, so müßte dieselbe eben die Theile geben, welche das Polynom (a + b + c) in der dritten Potenz gibt. Da nun $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 + 6abc$ gibt, so wird, wenn man 300 = a, 60 = b und 4 = c setzt $(300 + 60 + 4)^3$ folgende Theile geben:

Da a = 300, b = 60, c = 4, so ist

a^3 =	27000000
$3a^2b$ =	16200000
$3a^2c$ =	1080000
$3ab^2$ =	3240000
$3ac^2$ =	14400
b^3 =	216000
$3b^2c$ =	43200
$3bc^2$ =	2880
c^3 =	64
6abc =	432000
$(300 + 60 + 4)^3$ =	48228544

Daß die Zahl 364 in der dritten Potenz wirklich diese Theile enthalte, wird sogleich ersichtlich, wenn man dieselbe auf die dritte Potenz erhebt; denn 364 × 364 × 364 gibt ebenfalls 48228544.

Hat eine Zahl rechts Nullen, so hat die zweite Potenz derselben zweimal, die dritte Potenz dreimal, die vierte Potenz viermal so viel Nullen u. s. w.; denn das Produkt hat allemal soviel Nullen als die Faktoren zusammen haben, und da bei der zweiten Potenz 2, bei der dritten Potenz 3, bei der vierten Potenz 4 Faktoren mit gleichviel Nullen vorkommen, so muß auch das Produkt oder die Potenz 2-, 3-, 4mal u. s. w. soviel Nullen haben. Allgemein:

c. Wenn die Wurzel rechts x Nullen hat, so hat die nte Potenz derselben nx Nullen.

Z. B. Die Zahl 600 hat 2 Nullen, folglich wird die zweite Potenz derselben 2 × 2 = 4, die dritte Potenz 2 × 3 = 6, die vierte Potenz 2 × 4 = 8 Nullen u. s. w. haben.

Sollte man irgend einen Bruch auf eine Potenz erheben,

so haben wir bereits in den allgemeinen Regeln von Potenzen gesagt, daß sowohl Zähler als Nenner des gegebenen Bruches auf die verlangte Potenz erhoben werden müssen.

So würde z. B. der Bruch $\frac{4}{7}$ auf die fünfte Potenz erhoben $\frac{1024}{16807}$ geben; denn $\left(\frac{4}{7}\right)^5 = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{1024}{16807}$.

Da nun nach den Regeln der Multiplikation jedes Produkt ächter Brüche kleiner ist, als jeder der Faktoren, so muß auch jede Potenz eines ächten Bruches kleiner seyn, als die Wurzel, und zwar um so kleiner, je höher die Potenz ist. So ist z. B. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ u. s. w. Daher der Satz:

f. Jede Potenz eines ächten Bruches ist kleiner als die Wurzel, und zwar um so kleiner, je höher die Potenz ist.

Da Dezimalbrüche dieselben Eigenschaften haben, wie gemeine Brüche, und daher auch wie gemeine Brüche behandelt werden, so werden dieselben auch wie gemeine Brüche potenzirt, indem man sowohl Zähler als Nenner auf die gegebene Potenz erhebt. Da jedoch der Nenner der Dezimalbrüche immer 1 mit einer oder mehreren angehängten Nullen ist; 1 aber in jeder Potenz wieder 1 gibt, und die nte Potenz einer Wurzel, welche rechts Nullen hat, nmal soviel Nullen enthält, als die Wurzel: so ist auch der Nenner einer jeden Potenz eines Dezimalbruches 1 mit 2, 3, 4, ... nmal so viel Nullen, als die Wurzel enthält, nachdem der Exponent der Potenz 2, 3, 4 . . . n ist. Da endlich Dezimalbrüche meistens ohne Nenner geschrieben werden, indem man die Anzahl der in dem Nenner vorkommenden Nullen durch eine gleiche Anzahl von Dezimalstellen im Zähler bezeichnet, so wird man auch die Potenz eines Dezimalbruches ohne Nenner anschreiben können, indem man von der Potenz des Zählers 2, 3, 4 . . . nmal soviel Dezimalstellen abschneidet, als in der Wurzel vorkommen, je nachdem der Exponent der Potenz 2, 3, 4 oder n ist. Daher die Regel:

g. Die nte Potenz einer jeden Dezimalzahl wird gefunden, indem man dieselbe ohne Rück-

sicht auf das Komma, wie eine ganze Zahl auf die nte Potenz erhebt, sodann aber von derselben nmal soviel Dezimalstellen abschneidet, als die gegebene Dezimalzahl enthält.

So würde z. B. die Dezimalzahl 8,43 auf die dritte Potenz erhoben werden, indem man zuerst 843 ohne Rücksicht auf das Komma potenzirt, nämlich $(843)^3 = 599077107$, sodann aber 3mal soviel Dezimalstellen, als die Wurzel hat, folglich 6 Dezimalstellen abschneidet, nämlich: 599,077107.

Tafel der Quadrat- und Cubikzahlen

von 1 bis 100.

Zahl	Quadrat	Cubus	Zahl	Quadrat	Cubus
1	1	1	34	1156	39304
2	4	8	35	1225	42875
3	9	27			
4	16	64	36	1296	46656
5	25	125	37	1369	50653
			38	1444	54872
6	36	216	39	1521	59319
7	49	343	40	1600	64000
8	64	512			
9	81	729	41	1681	68921
10	100	1000	42	1764	74088
			43	1849	79507
11	121	1331	44	1936	85184
12	144	1728	45	2025	91125
13	169	2197			
14	196	2744	46	2116	97336
15	225	3375	47	2209	103823
			48	2304	110592
16	256	4096	49	2401	117649
17	289	4913	50	2500	125000
18	324	5832			
19	361	6859	51	2601	132651
20	400	8000	52	2704	140608
			53	2809	148877
21	441	9261	54	2916	157464
22	484	10648	55	3025	166375
23	529	12167			
24	576	13824	56	3136	175616
25	625	15625	57	3249	185193
			58	3364	195112
26	676	17576	59	3481	205379
27	729	19683	60	3600	216000
28	784	21952			
29	841	24389			
30	900	27000	61	3721	226981
			62	3844	238328
31	961	29791	63	3969	250047
32	1024	32768	64	4096	262144
33	1089	35937	65	4225	274625

Zahl	Quadrat	Cubus	Zahl	Quadrat	Cubus
66	4356	287496	84	7056	592704
67	4489	300763	85	7225	614125
68	4624	314432			
69	4761	328509	86	7396	636056
70	4900	343000	87	7569	658503
			88	7744	681472
71	5041	357911	89	7921	704969
72	5184	373248	90	8100	729000
73	5329	389017			
74	5476	405224	91	8281	753571
75	5625	421875	92	8464	778688
			93	8649	804357
76	5776	438976	94	8836	830584
77	5929	456533	95	9025	857375
78	6084	474552			
79	6241	493039	96	9216	884736
80	6400	512000	97	9409	912673
			98	9604	941192
81	6561	531441	99	9801	970299
82	6724	551368	100	10000	1000000
83	6889	571787			

II. Von Wurzeln.

A. Allgemeine Zahlen.

a. Da das Wurzelziehen nichts anderes, als eine besondere Art des Dividirens ist, allgemeine Zahlen aber nicht wirklich dividirt, sondern die Division derselben nur angezeigt werden kann, so kann auch das Wurzelziehen in algemeinen Zahlen nicht wirklich verrichtet, sondern nur angezeigt werden, wobei jedoch die bereits erklärten Abkürzungen allemal nach Zulassung statt finden.

So kann man z. B. weder die Quadrat- noch die Cubikwurzel von a oder b bestimmen, sondern man könnte dieselbe nur anzeigen, indem man das Wurzelzeichen mit dem entsprechenden Wurzelexponenten vorsetzt, nämlich: $\sqrt[2]{a}$ oder $\sqrt[3]{b}$.

b. Hat die allgemeine Zahl einen Coefficienten, so wird aus demselben ebenfalls nach den Regeln für besondere Zahlen die Wurzel gezogen.

Sollte z. B. aus 16 a die Quadratwurzel gezogen werden, so müßte man sowohl aus dem Coefficienten 16, als aus der Zahl a die Quadratwurzel ziehen, nämlich $\sqrt[2]{16\,a}$. Da nun die Quadratwurzel von $16 = 4$ ist, die Wurzel von a aber nicht bestimmt werden kann, so setzt man nun den Coefficienten 4, aus dem bereits die Wurzel gezogen wurde, vor das Wurzelzeichen, nämlich: $4\sqrt[2]{a}$. Eben so ist $\sqrt[3]{27\,ab} = 3\sqrt[3]{ab}$.

Wie man die Wurzel solcher allgemeinen Zahlen finde, welche Wurzel- oder Potenzexponenten haben, wird in dem Kapitel von den Potenz- oder Wurzel-Größen gelehrt werden.

B. Besondere Zahlen.

Da wir bei der Lehre von den Potenzen besonderer Zahlen gezeigt haben, daß man aus der Anzahl der Ziffern der gegebenen Wurzel auch die Anzahl der Ziffern für die verlangte Potenz bestimmen könne; so muß man auch umgekehrt aus der Anzahl der Ziffern einer gegebenen Potenz die Anzahl der Ziffern für die verlangte Wurzel bestimmen können. So haben wir z. B. gesagt: Wenn die Wurzel n Ziffern hat, so hat das Quadrat $2n$ oder $2n - 1$ Ziffern, das heißt, das Quadrat hat immer doppelt soviel, oder doppelt soviel Ziffern weniger einer, als die Wurzel hat. Man wird also auch den Satz umkehren und sagen können: Wenn das Quadrat $2n$ oder $2n - 1$ Ziffer hat, so hat die Wurzel n Ziffern. Da nun $2n$ jede mögliche gerade Zahl $2n - 1$ aber jede mögliche ungerade Zahl bezeichnet, so würde die obige Regel ungefähr so ausgedrückt werden können. Wenn die Zahl der Ziffern im gegebenen Quadrat eine gerade Zahl ist, so hat die Wurzel desselben halb soviel Ziffern; die Wurzel behält aber auch eben so viel Ziffern, wenn das Quadrat um eine Ziffer weniger hat. So würde z. B. die Quadrat-Wurzel von 6241 und von 961 zwei Ziffern haben. Daher folgende Sätze:

a. Wenn die gegebene Potenz $2n$ oder $2n - 1$ Ziffer hat, so hat die Quadratwurzel derselben n Ziffern.

b. Wenn die gegebene Potenz $3n$, $3n - 1$ oder $3n - 2$ Ziffern hat, so hat die Cubikwurzel derselben n Ziffern.

Wenn nämlich die Zahl der Ziffern in der gegebenen Potenz durch 3 theilbar ist, so hat die Cubikwurzel derselben dreimal weniger Ziffern; aber sie hat auch eben so viel Ziffern, wenn die gegebene Potenz um 1 oder 2 Ziffern weniger hat.

So hat z. B. die Cubikwurzel von 847396452 drey Ziffern, da diese Zahl 9 Ziffern enthält; allein auch die Zahl 47639428, welche nur 8 Ziffern hat, und die Zahl 7236841, welche nur 7 Ziffern enthält, würde in der Cubikwurzel 3 Ziffern haben. Eben so könnte man sagen:

Wenn die gegebene Potenz $4n$, $4n-1$, $4n-2$ oder $4n-3$ Ziffern enthält, so hat die vierte Wurzel derselben n Ziffern, u. s. w. Daher allgemein:

c. Wenn die gegebene Potenz $x.n$, oder $x.n-1$, $x.n-2$, $x.n-3$ . . . . . $x.n-(x-1)$ Ziffern hat, so hat die Wurzel x derselben n Ziffern.

Z. B. Man setze $x = 6$ und $n = 8$, so ist $x.n = 6.8 = 48$, $x-1 = 5$, und man würde daher sagen:

Wenn die gegebene Potenz 48 Ziffern oder $48-1 = 47$, oder $48-2 = 46$, $48-3 = 45$, $48-4 = 44$ oder endlich $48-5 = 43$ Ziffern hat, so hat die sechste Wurzel derselben 8 Ziffern.

Um daher die Anzahl der Ziffern für jede Wurzel einer gegebenen Potenz zu bestimmen, beobachte man folgende Regel:

d. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen ein, jede Klasse von soviel Ziffern, als der Wurzelexponent Einheiten hat, die letzte Klasse kann auch nur eine Ziffer haben; die Wurzel enthält dann soviel Ziffern, als die gegebene Potenz Klassen hat.

Sollte man z. B. bestimmen, wieviel Ziffern die Cubikwurzel der Zahl 28493768421 haben würde, so theile man dieselbe von der Rechten gegen die Linke in Klassen, jede von drei Ziffern, nämlich 28,493,768,421. Da nun diese Zahl 4 Klassen enthält, so wird die Wurzel auch 4 Ziffern haben.

Das Verfahren des Wurzelziehens ist folgendes:

Man bestimmt zuerst mittelst der oben angegebenen Regel die Zahl der Ziffern oder Theile für die gesuchte Wurzel; hierauf berechnet man, wieviel und was für Glieder die Wurzel, auf die gegebene Potenz erhoben, enthalten müsse; bestimmt mit Hilfe gewisser Sätze ein Glied nach dem andern in besondern Zahlen, und zieht dasselbe von der gegebenen Potenz ab. Bleibt kein Rest, oder läßt sich nach diesen Regeln keine andere Zahl bestimmen, die einen kleinern Rest zurückließe, so ist die angenommene Wurzel genau oder wenigstens möglichst genau in ganzen Zahlen be-

stimmt. Um nun das Verfahren des Wurzelziehens recht genau zu erklären, wollen wir einige Sätze vorausschicken.

1. Da jede Potenz 2, 3, 4 . . . nmal soviel Nullen hat, als die Wurzel derselben, je nachdem der Exponent 2, 3, 4 . . . . n ist, so kann man mittelst dieses Satzes genau bestimmen, bis zu welcher Stelle von der Linken gegen die Rechte jede bedeutende Ziffer der angenommenen Wurzel, auf die gegebene Potenz erhoben, reichen müsse.

Man nennt nämlich, wie bekannt, die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bedeutende, die Nullen aber unbedeutende Ziffern.

Es sey z. B. die gegebene Potenz 320294299788, aus welcher die Cubikwurzel bestimmt werden sollte, so würde man erstens die Anzahl der Theile bestimmen, welche die Wurzel enthalten müßte, indem man diese Zahl in Klassen theilt, jede von 3 Ziffern, nämlich 320,294,299,788 und es würde also die Wurzel 4 Ziffern haben.

Nehme man die höchste dieser vier Ziffern = a, die folgende = b, die dritte = c und die niedrigste = d, so würde die ganze Zahl = a + b + c + d seyn, und da d die Einheiten vorstellen, so hätte d keine Nullen; dagegen c als Zehner eine Nulle, c0; b als Hunderte zwei Nullen, b00, und a als Tausende drei Nullen a000. Sollte man nun von einer dieser vier Ziffern, z. B. von a000 angeben, innerhalb welchen Ziffern der gegebenen Zahl 320294299788 der Cubus ihrer bedeutenden Ziffern liege, so könnte dieß vermög dem obigen Satze genau geschehen: denn da a000 drei Nullen hat, so wird der Cubus derselben $3 \times 3 = 9$ Nullen haben, nämlich: $a^3$000000000, und es wird also der Cubus der höchsten bedeutenden Ziffer in der angenommenen Wurzel bis zur neunten Stelle von der Linken gegen die Rechte reichen, folglich in der gegebenen Zahl 320,294,299,788 innerhalb der Ziffern 320, liegen. Eben so würde der Cubus der bedeutenden Ziffer von b00 innerhalb der Ziffern 320294 liegen müssen, da b00 auf den Cubus erhoben, 6 Nullen hat, und folg-

lich in ihrer bedeutenden Ziffer bis zur sechsten Stelle von der Linken gegen die Rechte reicht.

2. Da jedes Produkt soviel Nullen hat, als die Faktoren zusammen, so kann man mittelst dieses Satzes genau bestimmen, bis zu welcher Stelle von der Linken gegen die Rechte die bedeutenden Ziffern der doppelten, dreifachen oder nfachen Produkte von je 2, 3 oder n Theilen der angenommenen Wurzel reichen müssen.

So könnte man z. B. bei der obigen Zahl 320294299788 genau bestimmen, bis zu welcher Stelle die bedeutenden Ziffern des dreifachen Produktes aus b und dem Quadrate von a reichen müssen; denn da a000 drei Nullen hat, so hat das Quadrat von a000 sechs Nullen, nämlich $a^2000000$; b00 hat 2 Nullen, folglich das dreifache Produkt von $a^2000000$ und b00 acht Nullen, nämlich $3a^2b00000000$, und es wird daher das dreifache Produkt aus b und dem Quadrate von a in seinen bedeutenden Ziffern bis zur achten Stelle reichen, folglich bei der Zahl 320294299788 innerhalb der Ziffern 3202 liegen.

3. Wenn man weiß, daß eine Zahl das 2-, 3- oder nfache Produkt zweier Faktoren ist, und man den einen Faktor kennt, so kann man den andern finden, indem man diese Zahl durch das 2-, 3- oder nfache des bekanten Faktors dividirt. Durch diesen Satz ist man mit Zuziehung der vorhergehenden im Stande, wenn man die höchste Ziffer der zu findenden Wurzel kennt, die folgenden niedrigern zu bestimmen.

Nachdem wir nun diese Sätze vorausgeschickt haben, wollen wir zum Wurzelziehen selbst übergehen, und das Verfahren dabei gleich an einem Beispiele zeigen.

Man sollte z. B. aus der Zahl 3532162624 die Quadratwurzel ziehen, so würde man dieselbe erstens in Klassen eintheilen, jede von 2 Ziffern, nämlich: 35,32,16,26,24 und es würde hiernach die Wurzel 5 Ziffern oder Theile haben.

Nennen wir die Theile a, b, c, d, e, so würde die ganze Wurzel mit dem Stellenwerthe bezeichnet a0000 + b000 + c00

$+ d0 + e$ seyn. Erhebt man diese fünf Theile der Wurzel auf das Quadrat, so wird dasselbe folgende Theile enthalten: $(a0000 + b000 + c00 + d0 + e)^2 = a^2 00000000 + 2ab0000000 + 2ac000000 + 2ad00000 + 2ae0000 + b^2 000000 + 2bc00000 + 2bd0000 + 2be000 + c^2 0000 + 2cd000 + 2de00 + d^2 00 + 2de0 + e^2$, welche auch in der gegebenen Zahl enthalten seyn müssen. Der höchste Theil in diesem Quadrate ist $a^2 00000000$, und es werden folglich die bedeutenden Ziffern desselben, da er acht Nullen enthält, in den zwei Stellen: 35 der gegebenen Zahl enthalten seyn. Das höchste Quadrat, welches in der Zahl 35 enthalten ist, ist $5 \times 5 = 25$; zieht man dieses Quadrat von der gegebenen Zahl ab, nämlich:

3532162624
2500000000, so bleibt als Rest:

1032162624, und der höchste Theil a0000 der zu bestimmenden Wurzel ist also = 50000. Nun suche man wieder aus den Theilen, welche in dem Quadrate von $(a0000 + b000 + c00 + d0 + e)$ enthalten sind, den höchsten heraus; dieser ist 2ab0000000, und die bedeutenden Ziffern desselben werden, da er sieben Nullen enthält, in den drei Stellen: 103 enthalten seyn; 2ab ist aber das doppelte Produkt von dem bereits gefundenen Theile a und dem nächst niedrigeren b. Da wir a schon kennen, so kann auch nach dem Satze 3 der Theil b bestimmt werden, indem man 103 durch 2a dividirt. Da $a = 50000$ oder ohne die Nullen = 5 ist, so ist $2a = 10$; 10 ist aber in 103 nur 9mal enthalten, da kein Theilquotient 10 seyn kann und es ist folglich $b000 = 900$, und $2ab = 2(50000 \times 9000) = 900000000$. Zieht man diesen Theil vom vorigen Reste ab, nämlich:

1032162624
900000000, so bleibt Rest:

132162624.

Da wir nun b000 kennen, so kennen wir auch $b^2 000000$; denn wenn $b000 = 9000$, so ist $b^2 000000 = 81000000$. Zieht man diesen Theil vom obigen Reste ab, nämlich:

132162624
81000000, so bleibt
51162624 als Rest.

Nun suche man wieder den höchsten Theil aus dem Quadrate ($a^2$00000000 + u. s. w.). Dieser ist 2ac000000 und wird mit seinen bedeutenden Ziffern in den Stellen 51 enthalten seyn. Da nun a0000 = 50000 oder ohne die Nullen = 5, so ist 2a = 10; 10 ist in 51 nur 4mal enthalten, folglich ist c = 4 oder c00 = 400 und 2ac000000 = 2(50000 × 400) = 40000000 zieht man diesen Theil wieder vom vorigen Rest ab, nämlich:

51162624
40000000, so bleibt als Rest:
11162624.

Da wir nun b und c kennen, so kennen wir auch 2bc00000 nämlich b = 9000, c = 400, folglich 2bc00000 = 7200000; dieß vom vorigen Reste:

11162624
7200000 abgezogen, gibt als Rest:
3962624.

Ferner kennen wir auch $c^2$0000; denn da c00 = 400, so ist $c^2$0000 = 160000, und vom vorigen Reste

3962624 abgezogen
160000, bleibt als Rest:
3802624.

Nun suche man wieder den höchsten Theil aus dem Quadrate ($a^2$00000000 + u. s. w.). Dieser ist 2ad00000, und wird folglich mit seinen bedeutenden Ziffern in den Stellen: 38 der gegebenen Zahl enthalten seyn. Da a ohne die Nullen = 5, so ist 2a = 10 und 10 ist in 38 dreymal enthalten, folglich d0 = 30 und 2ad00000 = 2 (50000 × 30) = 3000000. Dieß vom obigen Reste abgezogen, gibt:

3802624
3000000

802624 als Rest.

Da wir nun b und d kennen, so kennen wir auch 2bd0000; denn b000 = 90000, d0 = 30, und folglich 2bd0000 = 540000; vom obigen Reste abgezogen, gibt:

802624
540000

262624 als Rest.

Ferner kennen wir auch 2cd000; denn c000 = 400, d0 = 30, folglich 2cd000 = 24000, und vom obigen Reste abgezogen:

263624
24000

238624.

Endlich noch $d^2 00 = 900$ abgezogen

238624
900 gibt als Rest:

237724.

Hierauf suche man wieder den höchsten Theil aus dem Quadrate ($a^2 0000000 +$ u. s. w.). Dieser ist 2ae0000, und ist mit seinen bedeutenden Ziffern in den Stellen: 23 enthalten. Da nun 2a = 10 und 10 in 23 zweimal enthalten ist, so ist e = 2 und 2ae0000 = 2 (50000 × 2) = 200000. Dieß vom vorigen Reste abgezogen:

237724
200000 bleibt als Rest:

37724.

Da e = 2 und b000 = 9000, so ist 2be0000 = 2(9000 × 2) = 36000, dieß abgezogen vom vorigen Reste:

37724
36000 bleibt als Rest:

1724.

Da cc0 = 400 und e = 2, so ist 2 cc 00 = 2 (400 × 2) = 1600 und vom obigen Reste abgezogen, bleibt:

1724
1600 bleibt als Rest:

124.

Da ferner d 0 = 30 und e = 2, so ist 2 de 0 = 2 (30 × 2) = 120; und dieß ebenfalls abgezogen

124
120 bleibt als Rest:

4

Da endlich e = 2, so ist $2^2 = 4$, und dieß ebenfalls abgezogen, gibt:

4
4

0 als Rest, und es ist folglich die Zahl 50000 + 9000 + 400 + 30 + 2 = 59432 die richtige Wurzel von 3532162624, was man noch mehr dadurch beweisen kann, wenn man die Zahl 59432 wieder auf das Quadrat erhebt; denn 59432 × 59432 = 3532162624.

Setzt man die ganze Rechnung zusammen, nämlich:

$\sqrt{35,32,16,26,24}$ = a 0000 + b 000 + c 00 + d 0 + e

2500000000 = $a^2$00000000 . . . . a 0000 = 50000

1032162624

900000000 = 2 ab 0000000 . . . . b 000 = 9000

132162624

81000000 = $b^2$000000

51162624

51162624
40000000 = 2 ac 000000 . . . . . c00 = 400

11162624
7200000 = 2 bc 00000

3962624
160000 = c²0000

3802624
3000000 = 2 ad 00000 . . . . . d0 = 30

802624
540000 = 2 bd 0000

262624
24000 = 2 cd 000

238624
900 = c²00

237724
200000 = 2 ae 0000 . . . . . e = 2

37724
36000 = 2 be 000

1724
1600 = 2 ce 00

124
120 = 2 de 0

4
4 = e², a0000 + b000 + c00 + d0 + e = 59432

0

so erkennt man sehr bald, daß sich auch dieß Verfahren noch vereinfachen lasse, und zwar erstens dadurch, daß man das jedesmalige Anschreiben der Nullen wegläßt, indem man auch ohne diese genau bestimmen kann, von welchen bedeutenden Ziffern der gegebenen Potenz man den jedesmaligen Theil abziehen müsse; dann aber auch noch dadurch, daß man jedesmal die bereits ge-

fundenen Theile der Wurzel nur als einen Theil betrachtet. So konnte man z. B., als bereits die drey Theile 50000, 9000 und 400 gefunden waren, dieselben als einen Theil, nämlich 59400 betrachten, und den letzten Rest 3802624 durch das doppelte Produkt desselben dividiren, nämlich: 3802624 : 118800 = 3; wodurch man ebenfalls 3 als nächstfolgenden Theil erhält, und dabei die einzelnen Multiplikationen und Subtraktionen erspart.

Man kann daher für das Quadratwurzelziehen folgendes abgekürzte Verfahren aufstellen:

e. Um die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl schnell und richtig zu finden, beobachte man folgende Regeln:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen ein, jede Klasse von zwey Ziffern, die höchste Klasse kann auch nur eine Ziffer haben.

2. Man ziehe von der höchsten Klasse das größte Quadrat ab, das in derselben enthalten ist, und schreibe die Wurzel desselben als den höchsten Theil der zu findenden Wurzel an.

3. Man setze zu dem Reste die nächstfolgende Klasse, unter diesen ganzen Rest setze man mit Freylassung der niedrigsten Stelle desselben das doppelte Produkt des bereits gefundenen Theiles der Wurzel, und dividire durch dasselbe den darüberstehenden Rest mit Ausnahme der niedrigsten Stelle; schreibe den Quotienten sowohl zur Wurzel als auch unter die freigelassene Stelle des Restes an; multiplizire die ganze unter dem Reste angeschriebene Zahl mit dem zuletzt erhaltenen Quotienten, und subtrahire das Produkt vom Reste.

4. Man setze zu dem Reste wieder die nächstfolgende Klasse, betrachte die gefundenen Theile der Wurzel nur als einen Theil und verfahre wieder nach der vorhin gegebenen Regel.

5. Man verfahre nach den zwey letzten Regeln

so lange, bis die Wurzel genau oder möglichst genau bestimmt ist.

Z. B. Man sollte die Quadratwurzel der Zahl 468584059024 bestimmen, so würde dieß nach der gegebenen Anleitung auf folgende Art geschehen:

$$\sqrt{46,85,84,05,90,24} = 684532$$

36

1085
128
1024

6184
1364
5456

72805
13685
68425

438090
136903
410709

2738124
1369062
2738124

======

Man sieht dabey zugleich, daß die Zahl, welche jedesmal abgezogen wird, das doppelte Produkt aller vorangehenden Theile der bereits gefundenen Wurzel mit dem zuletzt erhaltenen Theile, und das Quadrat des zuletzt erhaltenen Theiles enthalte. So enthält z. B. die Zahl 410709 das doppelte Produkt von 60000 und 3, das doppelte Produkt von 8000 und 3, dann von 400 und 3, und endlich von 50 und 3, und noch das Quadrat von 3, nämlich:

$$
\begin{array}{rcl}
2(60000 \times 3) & = & 360000 \\
2(8000 \times 3) & = & 48000 \\
2(400 \times 3) & = & 2400 \\
2(50 \times 3) & = & 300 \\
3^2 & = & 9 \\
\hline
 & & 410709
\end{array}
$$

1. Aus einem gemeinen Bruche wird die Quadratwurzel gezogen, indem man entweder aus dem Zähler und Nenner Wurzel zieht, oder indem man denselben vorher in einen Dezimalbruch verwandelt und aus demselben die Quadrat-Wurzel zieht. So ist z. B. $\sqrt[2]{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt[2]{4}}{\sqrt[2]{5}}$ oder $= \sqrt[2]{0{,}8}$.

2. Aus einem Dezimalbruche wird die Quadratwurzel gezogen, indem man denselben vom Komma anzufangen gegen die Rechte und Linke in Klassen theilt, jede Klasse von 2 Ziffern, hierauf wie bei ganzen Zahlen Wurzel zieht, und nachdem man aus der letzten Klasse der ganzen Zahlen Wurzel gezogen hat, auch in der Wurzel ein Komma ansetzt, und das Verfahren des Wurzelziehens auch in Dezimalstellen fortsetzt.

Daß man, wenn man aus einem Dezimalbruche Quadrat-Wurzel ziehen will, denselben nicht von der untersten Stelle gegen die Linke, sondern vom Komma gegen die Rechte und Linke in Klassen eintheilen muß, ist dadurch zu erklären, daß, wenn man von der untersten Stelle gegen die Linke die Klassen bestimmen wollte, es bisweilen geschehen könnte, daß eine Klasse aus einer ganzen Zahl und einem Dezimalbruche bestünde, wie z. B. bei der Dezimalzahl 347,85329, wo, wenn man die Eintheilung in Klassen von der Rechten gegen die Linke vornehmen wollte, nämlich: 34.7,8.53.29, die dritte Klasse 8 Ganze und $\frac{5}{10}$ enthalten würde, was doch nicht seyn kann, da der kleinste mit einer Ziffer

geschriebene Dezimalbruch, nämlich 0,1 im Quadrate schon zwey Dezimalstellen hat, nämlich: $(0,1)^2 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0,01$ und es daher keine mit einer Dezimalstelle geschriebene Klasse des Quadrates geben kann.

Es sollte z. B. aus der Dezimalzahl 2339,850384 die Quadratwurzel gezogen werden, so wird dieß auf folgende Art geschehen:

$\sqrt{23.39,85.03.84} = 48,372$

16

739

88

704

3585

963

2889

69603

9667

67669

193484

96742

193484

Oder man sollte aus dem Bruche $\frac{144}{625}$ die Quadratwurzel bestimmen, so würde man entweder aus dem Zähler und Nenner die Quadratwurzel ziehen, nämlich:

$\sqrt{\frac{144}{625}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{625}} = \frac{12}{25}$; oder man würde denselben vorher in einen Dezimalbruch verwandeln, nämlich $\frac{144}{625} = 0,2304$ und hierauf Wurzel ziehen, nämlich:

$$\sqrt{0,23.04} = 0,48$$

16

704

88

704

und man erhält also auf beyde Arten ein gleiches Resultat, denn $0,48 = \frac{12}{25} = 12 : 25 = 0,48$.

Anmerkung. Wenn bey der Eintheilung eines Dezimalbruches in Klassen die niedrigste Klasse zu wenig Ziffern hat, so hänge man so viel Nullen an, als Ziffern fehlen. Z. B.

Man sollte aus dem Dezimalbruche 0,842 die Quadratwurzel ziehen, so würde nach geschehener Eintheilung 0,84.2 die unterste Klasse nur eine Ziffer haben, und man müßte daher eine Nulle anhängen, nämlich 0,84.20.

Nicht von jeder ganzen Zahl läßt sich jede Wurzel genau in ganzen Zahlen bestimmen.

h. Wenn sich die Wurzel einer gegebenen ganzen Zahl nicht genau durch eine ganze Zahl bestimmen läßt, so heißt dieselbe eine unausrechenbare oder Irrationalzahl.

So ist z. B. die Quadratwurzel von 3 eine unausrechenbare oder Irrationalzahl, weil sich dieselbe durch keine ganze Zahl genau ausdrücken läßt, denn: $\sqrt{3} = 1$ u. s. w.

1

2

i. Keine irrationale Wurzel läßt sich durch einen angehängten Bruch genau bestimmen.

Man nehme z. B. an, A sey eine ganze Zahl, deren mte Wurzel sich nicht genau in ganzen Zahlen bestimmen läßt, so ist $\sqrt[m]{A} > a$ und $\sqrt[m]{A} < a + 1$, das heißt, die mte Wurzel aus A ist größer, als die ganze Zahl a, und doch kleiner als $a + 1$,

und der Unterschied von der wahren Wurzel muß also weniger betragen als 1, und folglich ein ächter Bruch seyn. Nehmen wir an, dieser Bruch sey $\frac{b}{c}$, so würde dann $\sqrt[m]{A} = a + \frac{b}{c}$ seyn und folglich $\left(a + \frac{b}{c}\right)^m = A$ seyn, das heißt, die ganze Zahl a, sammt dem ächten Bruche $\frac{b}{c}$ auf die mte Potenz erhoben, gibt die ganze Zahl A, was nicht seyn kann, da vermög dem Satze m von Potenzen und Wurzeln kein ächter Bruch auf eine Potenz erhoben, eine ganze Zahl gibt. So läßt sich z. B. die Quadratwurzel von 28 durch keine ganze Zahl und durch keinen angehängten Bruch genau bestimmen; denn nehmen wir an: $\sqrt{28} = 5 + \frac{x}{y}$, so müßte $5 + \frac{x}{y}$ auf das Quadrat erhoben, wieder 28 geben, nämlich: $\left(5 + \frac{a}{y}\right)^2 = 25 + 10\,\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} = 28$. Hier ist nun 25 eine ganze Zahl, $\frac{10x}{y}$ kann auch eine ganze Zahl geben, wenn nämlich 10 durch y theilbar ist; allein $\frac{x^2}{y^2}$ kann nie eine ganze Zahl geben, da $\frac{x}{y}$ ein ächter Bruch ist, und kein ächter Bruch auf irgend eine Potenz eine ganze Zahl gibt, folglich kann $\left(5 + \frac{x}{y}\right)^2$ nicht $= 28$ seyn.

Obgleich sich nun irrationale Wurzeln nie ganz genau bestimmen lassen, so kann man doch durch Anwendung der Dezimalbrüche eine solche Zahl finden, welche von der wahren Wurzel so wenig abweicht, daß der Unterschied ganz unbeachtet bleiben kann.

So ist z. B. die Quadratwurzel von 39 eine Irrationalzahl; denn 6 ist als Wurzel zu klein, nämlich $6 \times 6 = 36$, und 7 zu groß, nämlich $7 \times 7 = 49$. Da man nun jede ganze Zahl durch Anhängung von 1, 2, 3 u. s. w. Nullen in Zehntel, Hundertel, Tausentel verwandeln kann, so kann man auch jedes Quadrat durch Anhängung von 2, 4, 6 u. s. w. Nullen, jeden Cubus durch Anhängung von 3, 6, 9 u. s. w. Nullen, und über-

haupt jede Potenz n durch Anhängung von n, $2n$, $3n$ u. s. w. Nullen in Zehntel, Hundertel, Tausentel der gegebenen Potenz verwandeln.

Verwandelt man nun die Zahl 39 vor dem Wurzelziehen durch Anhängung von 2 Nullen in Zehntel, und zieht hierauf die Wurzel, nämlich $\sqrt{30,00} = 6,2$; so ist

36

300
122
244

= 56

diese Wurzel schon nur um weniger als $\frac{1}{10}$ von der wahren Wurzel unterschieden, denn 6, 3 ist schon zu groß, da $6,3 \times 6,3 = 39,69$. Verwandelt man die gegebene Zahl 39 durch Anhängung von 4 Nullen in Hundertel, so beträgt der Unterschied von der wahren Wurzel schon weniger, als $\frac{1}{100}$; denn $\sqrt{39,00.00} = 6,24$, und $6,25$ ist

36

300
122
144

5600
1244
4976

624

schon zu groß, da $6,25 \times 625 = 39,0625$. Man wird also auf diese Art der Wurzel immer näher kommen, ohne dieselbe je wirklich zu erreichen. Doch aber wird schon bey sechs Dezimalstellen in der Wurzel der Unterschied kleiner als $\frac{1}{1000000}$ seyn, und kann folglich ganz unbeachtet bleiben.

k. Das Verfahren, die irrationale Wurzel einer ganzen Zahl auch in Dezimalbrüchen fort-

zusetzen, nennt man das Wurzelziehen durch Annäherung.

1. Wenn sich die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl nicht genau in ganzen Zahlen bestimmen läßt, so hänge man dem letzten und jedem nachfolgenden Reste eine Klasse von 2 Nullen an, und setze das Wurzelziehen auch in Dezimalstellen so lange fort, als man will.

Z. B. Man sollte aus der Zahl 84639 die Quadratwurzel ziehen, so ist:

$\sqrt{8,46,39} = 291$, eine irrationale Wurzel, und man wird daher das Wurzelziehen durch Anhängung von Nullen auch in Dezimalstellen fortsetzen, nämlich:

4
446
49
441
= 539
381
15800 . . . . . 291, 271 u. s. w.
5822
11644
415600
58247
407729
787100
582541 u. s. w.

Da das Verfahren des Wurzelziehens bey der Cubikwurzel dasselbe ist wie bey der Quadratwurzel, sich auf dieselben Grundsätze gründet, und nur die abzuziehenden Theile anderer Art sind; so wollen wir dasselbe sogleich an einem Beyspiele darstellen und dann die Regeln für das Cubikwurzelziehen anführen.

Man sollte aus der Zahl 48228544 die Cubikwurzel ziehen, so wird man zuerst dieselbe in Klassen eintheilen, um die Zahl der Theile für die Wurzel zu bestimmen, nämlich: 48,228,544; die Wurzel wird also drey Theile haben, nämlich a 00 + b 0 + c.

Diese werden auf die dritte Potenz erhoben, folgende Theile geben: $(a00 + b0 + c)^3 = a^3000000 + 3a^2b00000 + 3a^2c0000 + 3ab^20000 + 3ac^200 + b^3000 + 3b^2c00 + 3bc^20 + c^3 + 6abc000$. Der höchste dieser Theile $a^3000000$ hat 6 Nullen, und ist folglich mit seinen bedeutenden Ziffern in den Stellen 48 der gegebenen Zahl enthalten. Der höchste Cubus, der in 48 enthalten ist, ist 27 und folglich die höchste Stelle der Wurzel 3. Zieht man diesen Cubus ab, nämlich:

48228544
27000000, so bleibt als Rest:
21,228,544.

Nun ziehe man wieder den höchsten unter den obigen Theilen ab. Dieser ist $3a^2b00000$ und wird, da er 5 Nullen hat, mit seinen bedeutenden Ziffern in den Stellen 212 enthalten seyn; a ist bekannt, nämlich: $a = 3$, folglich ist auch $3a^2$ bekannt, denn $a^2 = 3 \times 3 = 9$ und $3a^2 = 3 \times 9 = 27$. Dividirt man nun 212 durch 27, so ist $212 : 27 = 6$, da man beym Cubikwurzelziehen diesen Quotienten wegen der übrigen abzuziehenden Theile immer um 1 oder 2 Einheiten kleiner annehmen muß, als er sonst seyn würde. Folglich ist $b0 = 60$ und $3a^2b$ ohne die Nullen $= 27 \times 6 = 162$; dieß von obigem Reste abgezogen, gibt:

11228544
16200000
5028544 als Rest.

Und so wird mit allen folgenden Theilen fortgefahren, weßhalb wir nur die Rechnungsergebnisse hier im Ganzen ansetzen wollen:

$\sqrt[3]{48228544} = a00 + b0 + c$
$27000000 = a^3000000 \ldots\ldots a00 = 300$
21228544
$16200000 = 3a^2b00000 \ldots\ldots b0 = 60$
5028544

5028544
3240000 = $3ab^2 0000$
1788544
216000 = $b^3 000$
1572544
1080000 = $3a^2c\,0000$ . . . . . $c = 4$
492544
14400 = $3ac^2 00$
478144
43200 = $3b^2c\,00$
434944
2880 = $3bc^2 0$
432064
64 = c^3
432000
432000 = $6abc\,000$
======

Man sieht, daß bei diesem Verfahren ebenfalls bedeutende Abkürzungen bewirkt werden können, wenn man das jedesmalige Anschreiben der Nullen unterläßt, und eben so, wie beim Quadratwurzelziehen die bereits gefundenen Theile der Wurzel jedesmal nur als einen Theil betrachtet. Es lassen sich daher für das Cubikwurzelziehen folgende Regeln aufstellen:

m. Um die Cubikwurzel einer gegebenen Zahl schnell und richtig zu finden, beobachte man folgende Regeln:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, jede Klasse von 3 Ziffern. Die letzte Klasse kann auch nur 1 oder 2 Ziffern haben.

2. Man ziehe von der höchsten Klasse den größten Cubus ab, der in derselben enthalten ist.

3. Man setze zu dem Reste die nächstfolgende Klasse herab, dividire dieselbe mit Ausnahme der zwey niedrigsten Stellen durch das dreyfache

Quadrat der bereits gefundenen Wurzel, multiplizire dieses dreyfache Quadrat mit dem Quotienten, den man als den nächst niedrigern Theil der Wurzel anschreibt, und setze das Produkt unter den Rest mit Freilassung der zwey niedrigsten Stellen; hierauf multiplizire man das dreyfache Quadrat des zuletzt gefundenen Theiles der Wurzel mit dem ersten Theile derselben, und setze das Produkt unter das vorige, jedoch um eine Stelle weiter gegen die Rechte; sodann erhebe man den zuletzt gefundenen Theil auf den Cubus, und setze denselben wieder unter das vorige Produkt, jedoch abermals um eine Stelle weiter gegen die Rechte; endlich addire man diese drey Produkte und subtrahire die Summe von dem darüber stehenden Reste.

4. Man setze zu dem Reste wieder die nächstfolgende Klasse herab, betrachte die bereits gefundenen Theile der Wurzel nur als einen Theil, und verfahre nach der vorigen Regel.

5. Man verfahre nach den vorigen 2 Regeln so lange, bis die Wurzel genau oder möglichst genau bestimmt ist.

Z. B. Man soll aus der Zahl 48427561125 die Cubikwurzel finden, so wird dieß auf folgende Art geschehen:

$$\sqrt[3]{48,427,561,125} = 3645$$

27

214(27 : 27 = 6

162

324

216

19656

=17715(61 : 3888 = 4

177156(1 : 3888 = 4
15552
1728
64

1572544

1990171(25 : 397488 = 5
1987440
27300
125

199017125

Daß auf diese Art keine sechsfachen Produkte abgezogen werden, kommt daher, weil man sich die Wurzel immer nur als aus 2 Theilen bestehend vorstellt. Jedoch sind dieselben allerdings schon in den einzelnen Produkten vorhanden. So enthält z. B. die Summe 1572544 das dreyfache Quadrat von 300, multiplizirt mit 4; dann das dreyfache Quadrat von 60, multiplizirt mit 4: dann das dreyfache Quadrat von 4, multiplizirt mit 300; das dreyfache Quadrat von 4, multiplizirt mit 60; den Cubus von 4; und endlich das sechsfache Produkt von 300 × 60 × 4, nämlich:

$3((300)^2 \times 4) = 1080000$
$3((60)^2 \times 4) = 43200$
$3(300 \times 4^2) = 14400$
$3(60 \times 4^2) = 2880$
$4^3 = 64$
$6(300 \times 60 \times 4 = 432000$

1572544

n. Aus einem gegebenen Bruche wird die Cubikwurzel gezogen, indem man entweder aus dem Zähler und Nenner die Cubikwurzel zieht, oder indem man denselben vorher in einen Dezimalbruch verwandelt, und aus diesem die verlangte Wurzel zieht.

o. Aus einem Bruche wird Cubikwurzel gezogen, indem man denselben vom Komma anzufangen in Klassen theilt, jede Klasse von drey Ziffern, hierauf wie bey ganzen Zahlen Wurzel zieht, und nachdem man aus der letzten Klasse der Ganzen Wurzel gezogen hat, auch in der Wurzel die Ganzen durch ein Komma bezeichnet, und das Wurzelziehen auch in Dezimalstellen fortsetzt.

Warum man beim Cubikwurzelziehen die gegebene Dezimalzahl nicht von der untersten Stelle gegen die Linke, sondern vom Komma gegen die Rechte und Linke in Klassen theilen müsse, läßt sich eben so, wie beym Quadratwurzelziehen daraus erklären, daß es bei dieser Eintheilung geschehen könnte, daß eine Klasse aus Ganzen und Dezimaltheilen bestände, was doch nicht statt finden kann, da schon der kleinste einziffrige Dezimalbruch, nämlich 0,1 im Cubus drey Dezimalstellen gibt, nämlich: $0{,}1 = \frac{1}{10}, \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = 0{,}001.$

Z. B. Man sollte aus der Dezimalzahl 84,027672 die Cubikwurzel ziehen, so wird dieß auf folgende Art geschehen:

$\sqrt[3]{84{,}027.672} = 4{,}38$

64

200(27 : 48 = 3

144

108

27

15507

45206(72 : 5547 = 8

44376

8256

512

4520672

=======

Oder man sollte aus dem Bruche $\frac{1331}{151625}$ die Cubikwurzel ziehen, so müßte man entweder sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner die Cubikwurzel ziehen, nämlich:

$\sqrt[3]{\frac{1331}{15625}} = \frac{\sqrt[3]{1331}}{\sqrt[3]{15625}} = \frac{11}{25}$; oder denselben vorher in einen Dezimalbruch verwandeln, nämlich: $\frac{1331}{15625} = 0{,}085184$, und aus diesem die Cubikwurzel ziehen, nämlich:

$$\sqrt[3]{0{,}085.184} = 0{,}44$$

64

211(84 : 48 = 4

192

192

64

21184

*****

Man bekommt daher auf beyde Arten dasselbe Resultat, denn $0{,}44 = \frac{11}{25} = 11 : 25 = 0{,}44$.

Anmerkung. Sollte bei der Eintheilung eines Dezimalbruches in Klassen die niedrigste Klasse zu wenig Ziffern haben, so hängt man derselben so viele Nullen an, als Ziffern fehlen. Z. B. Man sollte aus dem Dezimalbruche 0,82345 die Cubikwurzel ziehen, so hat nach geschehener Eintheilung die niedrigste Klasse nur 2 Ziffern, und man müßte derselben daher eine Nulle anhängen, nämlich: 0,823.450.

p. Wenn sich die Cubikwurzel einer gegebenen ganzen Zahl durch keine ganze Zahl genau bestimmen läßt, so kann man das Wurzelziehen auch noch in Dezimalstellen fortsetzen, indem man dem jedesmaligen Reste eine Klasse von drey Nullen anhängt.

So läßt sich z. B. die Cubikwurzel von 38457 nicht genau in ganzen Zahlen bestimmen, und man müßte daher das Wurzelziehen auch in Dezimalstellen fortsetzen, nämlich:

$$\sqrt[3]{38,457} = 33,74$$

27

114(57 : 27 = 3

81

81

27

8937

25200(00 : 3267 = 7

22869

4851

343

2335753

1842470(00 : 340707 = 4 u. s. w.

Ganz nach denselben Gesetzen werden auch die Regeln für die Bestimmung der Wurzel des 4ten, 5ten . . . . nten Grades gebildet. Doch müssen wir dieselben, da es der Zweck dieses Lehrbuches nicht gestattet, hier übergehen.

Von Exponentialgrößen und Exponentialzahlen.

a. Eine Exponentialzahl ist diejenige, welche einen Exponenten der Potenz oder Wurzel hat.

So sind z. B. a^4, $\sqrt[3]{ab+c}$, 8^9, $\sqrt{345}$ Exponentialzahlen.

b. Jede Exponentialzahl bildet durch die Wurzel und den mit derselben verbundenen Exponenten eine Größe, ein Ganzes, dessen Werth durch den Werth beyder bestimmt ist.

So ist z. B. a^4 ein Ganzes, eine Größe, deren Werth durch die Wurzel a und den Exponenten 4 bestimmt ist. Eben so ist $\sqrt[3]{729}$ eine Größe oder ein Ganzes, dessen Werth durch die Wurzel 729 und den Wurzelexponenten 3 bestimmt ist.

c. Jede Veränderung der Wurzel oder des Exponenten einer Exponentialgröße erzeugt daher eine Größe anderer Art.

So ist z. B. a^2 eine Größe anderer Art, als a^3 oder b^2.

d. Die Anzahl gleicher Exponentialgrößen muß durch einen Coeffizienten ausgedrückt werden.

Sollte man z. B. ausdrücken, daß die Exponentialgröße a^3, 3=, 4= oder nmal vorhanden sey, so müßte man dieß durch Vorsetzung des Coeffizienten 3, 4 oder n bezeichnen, nämlich $3a^3$, $4a^3$ oder na^3. Eben so zeigt in dem Ausdrucke $4\left(\sqrt[3]{36}\right)$ oder $4\sqrt[3]{36}$ den Coeffizient 4 an, daß man die Exponentialgröße $\sqrt[3]{36}$ 4mal nehmen solle.

Da jede Zahl aus einer Menge Einheiten oder Größen derselben Art besteht, und jede Exponentialgröße durch ihre Wurzel

den Exponenten nur ein Ganzes oder eine Einheit bildet, so müssen allemal mehrere Exponentialgrößen derselben Art vorhanden seyn, um eine Exponentialzahl bilden zu können.

e. Eine Exponentialzahl ist daher diejenige Zahl, welche mehrere Exponentialgrößen derselben Art enthält.

So sind z. B. 3^4, a^5 $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[5]{36}$ Exponentialgrößen; aber $3(12^2)$, $5a^4$, $3\sqrt{m^2}$ $25\sqrt[3]{3,24}$ Exponentialzahlen.

f. Nur Exponentialgrößen der ersten, zweyten und dritten Potenz lassen sich als wirklich vorhandene Größen darstellen; alle anderen Potenzen erscheinen nur als Ergebnisse im Verfolge arithmetischer Auflösung der Aufgaben.

So drückt jede Größe der ersten Potenz eine wirklich vorhandene oder gedachte Anzahl von Gulden, Pfunden, Tagen, Klaftern u. dgl. aus. Jede Größe der zweyten Potenz kann als eine viereckige rechtwinklichte Fläche dargestellt werden, da man den Flächeninhalt einer jeden solchen Fläche berechnet, indem man die Länge und Breite derselben, welche einander gleich sind, folglich zwey gleiche Faktoren mit einander multiplizirt. Denn ist z. B. die Länge einer solchen viereckigen rechtwinklichten Fläche a, und die Breite auch a, so ist ihr Flächeninhalt $a \times a = a^2$. Eben so stellt n^2 eine rechtwinklichte viereckige Fläche dar, deren Länge n und deren Breite ebenfalls n ist. Jede Größe der dritten Potenz endlich läßt sich als einen würfelförmigen oder kubischen Körper darstellen; denn da man den körperlichen Inhalt eines jeden solchen würfelförmigen Körpers berechnet, indem man die Länge, Breite und Höhe oder Stärke desselben, welche einander gleich sind, mit einander multiplizirt, so erhält man ein Produkt aus drey gleichen Faktoren oder eine dritte Potenz. Wäre z. B. die Länge eines Würfels a, die Breite und Höhe ebenfalls a, so würde der körperliche Inhalt desselben $a \times a \times a = a^3$ seyn. Eben so könnte man sich unter n^3 einen Würfel vorstellen, dessen Länge, Breite und Höhe n ist.

g. Gegenstand der Arithmetik eigentlich sind bloß Größen der ersten Potenz, Gegenstand der Geometrie sind Größen der ersten, zweyten und dritten Potenz.

Der Endzweck jeder arithmetischen Aufgabe, jeder quadratischen oder kubischen Gleichung u. s. w. ist, die gesuchte unbekannte Größe in ihrer ersten Potenz darzustellen; und wenn auch in arithmetischen Aufgaben Größen der zweyten oder dritten Potenz, z. B. Quadratklafter, Cubikschuhe, vorkommen, so werden dieselben doch nur immer nach ihrer Anzahl oder der Anzahl ihrer Theile betrachtet.

Die Geometrie dagegen beschäftigt sich mit Größen der ersten Potenz, nämlich mit Längen, mit Größen der zweyten Potenz, nämlich Flächen; und Größen der dritten Potenz, nämlich Körpern, als solchen.

I. Addition der Exponentialzahlen.

a. Nur Exponentialzahlen, deren Wurzeln und Exponenten gleich sind, können addirt werden.

Denn da wir bereits erklärt haben, daß jede Veränderung der Wurzel oder des Exponenten einer Exponentialzahl eine Größe anderer Art darstelle, und folglich nur diejenigen Exponentialgrößen als gleichartig betrachtet werden können, deren Wurzeln und Exponenten gleich sind; da ferner nur gleichartige Größen addirt werden können, so können auch nur Exponentialzahlen von gleichen Wurzeln und Exponenten addirt werden. So könnten z. B. nur a^2 und a^2 oder b^3, b^3 und b^3, nicht aber a^2 und b^3 addirt werden.

b. Exponentialzahlen von gleichen Wurzeln und Exponenten werden addirt, indem man die Anzahl gleicher Exponentialzahlen in der Summe durch den Coeffizienten ausdrückt.

So würden z. B. a^3, a^3 und a^3 addirt werden, indem man die Anzahl dieser gleichen Exponentialzahlen durch den vorgesetzten Coeffizienten bezeichnet, nämlich: $a^3 + a^3 + a^3 = 3a^3$.

Daß die Addition auf diese Art richtig vollbracht werde, läßt sich aus dem Satze beweisen, daß die Summe mit den addirten Größen immer gleichartig seyn müsse. Da nun Exponentialgrößen nur dann gleichartig sind, wenn sie gleiche Wurzeln und gleiche Exponenten haben, so muß auch bey der Addition derselben in der Summe dieselbe Wurzel und derselbe Exponent vorhanden seyn, der in den gegebenen Exponentialzahlen enthalten ist. Sollte man z. B. $7a^4$ und $5a^4$ addiren, so ist die Summe $7a^4 + 5a^4 = 12a^4$, so wie 7 Pfund und 5 Pfund 12 Pfund geben. Eben so ist $3\sqrt{a^4} + 5\sqrt{a^4} = 8\sqrt{a^4}$.

Aufgaben zur Uibung.

1. Aufgabe. Man soll die Exponentialzahlen $3a^4$, $5b^2$, $7a^2c$, $9a^4$, $12b^2$, $4ac^3$, $18b^3$, $5a^2c$ und $7ac^3$ addiren.

2. Aufgabe. Man soll die Summe der Exponentialzahlen $+ a^4$, $- 5b^2c - 4a^5b^3 + 3a^2d + 7a^4 + 12a^5b^3 + 7b^2c - 9a^4 - 15a^2d + 3a^5b^3 - 12\sqrt{a^3} - 8a^4 + 7\sqrt{a^3}$ bestimmen.

3. Aufgabe. Man soll die Summe folgender Exponentialzahlen finden $\frac{3}{4}\sqrt{a^2b} + \frac{3a^4}{b} + 7b^2c^5 - \frac{1}{4}\sqrt{a^2b} + \frac{7a^4}{b} - 5b^2c^5 + 18\sqrt{d^2c} + 6(4^5) - 9\sqrt{3,52} + \frac{2}{4}\sqrt{a^2b} - 4(4^5) + 6\sqrt{3,52}$.

Auflösungen.

1. Aufgabe. Die Summe ist: $12a^4 + 35b^2 + 12a^2c + 11ac^3$.

2. Aufgabe. Die Summe ist: $- 9a^4 + 2b^2c + 11a^5b^3 - 12a^2d - 5\sqrt{a^3}$.

3. Aufgabe. Die Summe ist: $\sqrt{a^2b} + \frac{10a^4}{b} + 2b^2c^5 + 18\sqrt{d^2c} + 2(4^5) - 3\sqrt{3,52}$.

II. Subtraktion der Exponentialzahlen.

c. Nur Exponentialzahlen von gleichen Wurzeln und Exponenten können subtrahirt werden.

Denn da nur Exponentialzahlen von gleichen Wurzeln und Exponenten als gleichartig betrachtet werden, und nur gleichartige Größen subtrahirt werden können; so können auch nur Exponentialzahlen von gleichen Wurzeln und Exponenten subtrahirt werden.

b. Exponentialzahlen von gleichen Wurzeln und Exponenten werden subtrahirt, indem man den Unterschied der gleichen Exponentialzahlen durch den Coeffizienten ausdrückt.

Sollte man z. B. von $5a^4$ die Exponentialzahl $3a^4$ abziehen, so wäre der Unterschied $5a^4 - 3a^4 = 2a^4$. Eben so würden $12(6^3)$ von $18(6^3)$ abgezogen $6(6^3)$ geben. Daß die Subtraktion auf diese Art richtig vollbracht werde, läßt sich aus dem Satze beweisen, daß der Unterschied bey der Subtraktion mit den gegebenen Zahlen gleichartig seyn müsse. Denn da Exponentialzahlen nur dann gleichartig sind, wenn sie gleiche Wurzeln und Exponenten haben, so muß der Unterschied denselben Exponenten und dieselbe Wurzel haben, wie die gegebenen Zahlen, und es darf also mit diesen beyden keine Veränderung vorgehen, sondern der Unterschied kann nur durch den Coeffizienten ausgedrückt werden.

Aufgaben zur Uibung.

1. Aufgabe. Man soll $3a^4 + 5b^2 + 32c^3d$ von $7a^4 + 12b^2 + 4g^4 + 48c^3d$ abziehen.

2. Aufgabe. Man soll $+ 3\sqrt[2]{a^3} + 18a^4g + \frac{3a^2}{b^4} + 4h^2 + \frac{5a^2}{4\sqrt{g^3}}$ von $+ 20a^4g - 2\sqrt[2]{a^3} + \frac{5a^2}{b^4} + 12h^2 + \frac{10a^2}{4\sqrt{g^3}}$ abziehen.

3. Aufgabe. Es sollen $-12a^4+\frac{13a^2}{12b^4}-8\sqrt[3]{a^2g}+3(5{,}284^2)-8\sqrt[3]{4{,}25}+3a^4h^2$ von $+16a^4-\frac{10a^2}{12b^4}+6\sqrt[3]{4{,}25}-4a^4h^2+12\sqrt[3]{a^2g}$ abgezogen werden.

Auflösungen.

1. Aufgabe. Der Unterschied ist: $4a^4+7b^2+4g^4+16c^3d$.

2. Aufgabe. Der Unterschied ist: $-5\sqrt[3]{a^2}+2a^4g+\frac{2a^2}{b^4}+8h^2+\frac{5a^2}{4\sqrt{g^3}}$.

3. Aufgabe. Der Unterschied ist: $+28a^4-\frac{23a^2}{12b^4}+20\sqrt[3]{a^2g}-3(5{,}284^2)+14\sqrt[3]{4{,}25}-7a^4h^2$.

III. Multiplikation der Exponentialzahlen.

a. Bey der Multiplikation der Exponentialzahlen können zwei Fälle eintreten, nämlich:

1. Eine Exponentialzahl mit einer gemeinen Zahl.

2. Eine Exponentialzahl wieder mit einer Exponentialzahl zu multipliziren.

3. Eine Exponentialzahl wird mit einer gemeinen Zahl multiplizirt, indem man die gemeine Zahl mit dem Coefficienten der Exponentialzahl multiplizirt, und das Produkt als Coefficienten vor die Exponentialgröße, die man unverändert läßt, anschreibt.

Sollte man z. B. $2\,a^4$ mit 5 oder $6\sqrt{24}$ mit 3 multipliziren, so wird dieß auf folgende Art geschehen: $2\,a^4 \times 5 = 10\,a^4$, $6\sqrt{24} \times 3 = 18\sqrt{24}$.

Daß die Multiplikation auf diese Art richtig vollbracht werde, läßt sich aus der Multiplikation genannter Zahlen beweisen. Eine genannte Zahl wird nämlich mit einer ungenannten multiplizirt, indem man beyde Zahlen ohne Rücksicht auf Benennung multiplizirt, zu dem Produkte aber die Benennung der gegebenen genannten Zahl hinzusetzt. Da nun bey jeder Exponentialzahl die Wurzel mit dem Exponenten die Art der Größen bezeichnet, folglich nichts anders, als eine Benennung der Größen ist, deren Anzahl der Coeffizient ausdrückt; so müssen auch Exponentialzahlen mit gemeinen Zahlen multiplizirt werden, indem man zu dem Produkte der gemeinen Zahlen mit den Coeffizienten die Wurzel und den Exponenten der gegebenen Exponentialzahl hinzusetzt.

b. Ist vor einer Exponentialgröße kein Coeffizient angeschrieben, so hat dieselbe den Coeffizienten 1.

Sollte man daher 8 mit a^4 multipliziren, so denke man sich zu a^4 den Coeffizienten 1, nämlich $1\,a^4$ und es ist also das Produkt $8 \times 1\,a^4 = 8\,a^4$. Eben so ist $12^3 \times 5 = 5\,(12^3)$.

2. Exponentialzahlen mit Exponentialzahlen können nicht wirklich multiplizirt, sondern die Multiplikation derselben kann nur angezeigt werden.

Daß Exponentialzahlen mit Exponentialzahlen nicht wirklich multiplizirt werden können, läßt sich ebenfalls aus der Multiplikation genannter Zahlen beweisen; denn da man keine genannte Zahl wieder mit einer genannten Zahl, z. B. 8 Gulden mit 3 Pfunden oder 7 Jahre mit 5 Ellen multipliziren kann, weil es keinen Sinn hätte, 8 Gulden 3 Pfundmal oder 7 Jahre 5 Ellenmal nehmen; so kann man auch keine Exponentialzahl wieder mit einer Exponentialzahl multipliziren.

c. Die Multiplikation der Exponentialzahlen mit Exponentialzahlen wird angezeigt, indem

man das wirkliche Produkt der Coefflzienten vor das angezeigte Produkt der Exponentialgrößen der gegebenen Faktoren anschreibt.

Sollte man z. B. $3\,a^4$ mit $6\,b^2c^3$ oder $4\,(12^5($ mit $5\,(1{,}8^2)$ multipliziren, so wird die Multiplikation auf folgende Art angezeigt werden: $3\,a^4 \times 6\,b^2c^3 = 18\,a^4b^2c^3$, $4\,(12^3) \times 5\,(1{,}8^2) = 20\,(12^3 \times 1{,}8^2)$.

d. Haben die gegebenen Exponentialzahlen gleiche Wurzeln, und keine oder gleiche Wurzelexponenten, so wird die Multiplikation abgekürzt, indem die Wurzel nur einmal angeschrieben und die Summe der Potenzexponenten der gegebenen Faktoren als Exponent dazugesetzt wird.

Sollte man z. B. $3\,a^4$ mit $5\,a^3$ oder $3\,(12^5)$ mit $8\,(12^2)$ multipliziren, so wird dieß auf folgende Art geschehen: $3\,a^5 \times 2a^3 = 15\,a^4 \cdot a^3 = 15\,a^7$; $3\,(12^5) \times 8\,(12^2) = 24\,(12^5 \times 12^2) = 24\,(12^8)$.

Daß dieses Verfahren richtig sey, läßt sich auf folgende Art beweisen: $3\,a^4$ ist $= 3\,aaaa$, $5\,a^3 = 5aaa$, folglich $3\,a \times 5a^3 = 3aaaa \times 5\,aaa = 15aaaaaaa = 15a^7$; eben so ist $3\,(12^5) = 3\,(12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12)$, $8\,(12^2) = 8\,(12 \times 12 \times 12)$, folglich $3\,(12^5) \times 8\,(12^2) = 3\,(12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12) \times 8\,(12 \times 12 \times 12) = 24\,(12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12) = 24\,(12^8)$. Oder allgemein: $a^m \times a^n = a^{m+n}$; denn $a^n = a \times a \times a \ldots$ mmal $a^n = a \times a \times a \ldots$. nmal, folglich $a^m \times a^n = a \times a \times a$ mmal $\times\, a \times a \times a \ldots$. nmal $= a \times a \times a \ldots$. $m \times$ nmal $= a^{m+n}$.

e. Zu jeder Zahl, bey welcher kein Exponent angeschrieben ist, kann man sich den Exponenten 1 hinzudenken. So würde z. B. $a \times a^4 = a^5$ seyn, da a eben so viel ist, als a^1 und folglich $a^1 \times a^4 = a^5$ ist.

Aufgaben zur Uibung.

1. Aufgabe. Man soll die Exponentialzahl $(a^2 + 4\,b^5 - 8\,c^3d + 4\sqrt[3]{a^2b})$ mit 24 multipliziren.

2. Aufgabe. Man ſoll die Exponentialzahl $(6\,a^2b + 8\sqrt{2,4} - \frac{3\,a^2}{4\,b^3} + 18\,b^3c)$ mit $(8\,d + 4\,m)$ multipliziren.

3. Aufgabe. Die Exponentialzahl $(4\,a^2 - 12\,g^4\,m^3 + 8\sqrt{b^2} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{dg})$ ſoll mit $3\,a^5 - 4\,g^3\,m^2 + 8\sqrt[3]{dg}$ multiplizirt werden.

Auflöſungen.

1. Aufgabe. Das Produkt iſt: $24\,a^3 + 96\,b^5 - 192\,c^2d + 96\sqrt[3]{a^2b}$.

2. Aufgabe. Das Produkt iſt: $48\,a^2bd^2 + 64\,d\sqrt{2,4} - \frac{6\,a^2d}{b^3} + 144\,b^3cd + 24\,a^2bm + 32\,m\sqrt{2,4} - \frac{3\,a^2m}{b^3} + 72\,b^3c\,m$.

3. Aufgabe. Das Produkt iſt: $12\,a^7 - 36\,a^5g^4m^2 + 24\,a^5\sqrt{b^2} - \frac{9\,a^5}{4}\sqrt[3]{dg} - 16\,a^2g^3m^2 + 48\,g^7m^5 - 32\,g^3\,m^2\sqrt{b^2} + 3\,g^3m^2\sqrt[3]{dg} + 32\,a^2\sqrt[3]{dg} - 76\,g^4m^3\sqrt[3]{dg} + 64\sqrt[3]{dg} \times \sqrt{b^2} - 6\sqrt[3]{bg^2}$.

IV. Diviſion der Exponentialzahlen.

a. Bey der Diviſion der Exponentialzahlen können ſich drey Fälle ergeben, nämlich:

1. Eine Exponentialzahl durch eine gemeine Zahl,

2. Eine gemeine Zahl durch eine Exponentialzahl,

3. Eine Exponentialzahl durch eine Exponentialzahl zu dividiren.

1. Eine Exponentialzahl wird durch eine ge-

meine Zahl dividirt, indem man den Coeffizienten der Exponentialzahl durch die gemeine Zahl dividirt, und zum Quotienten die Wurzel und den Exponenten der Exponentialzahl hinzusetzt.

Sollte man z. B. $16a^2$ durch 8 oder $12\sqrt[3]{3,42}$ durch 6 dividiren, so wird die Division auf folgende Art vollbracht werden: $16a^2 : 8 = 2a^2$, $12\sqrt[3]{3,42} : 6 = 2\sqrt[3]{3,42}$. Daß die Division auf diese Art richtig vollbracht werde, läßt sich aus der Division genannter Zahlen beweisen. Genannte Zahlen werden durch ungenannte Zahlen dividirt, indem man dieselben wie ungenannte Zahlen dividirt, und zum Quotienten die Benennung der gegebenen genannten Zahl hinzusetzt. Da nun die Wurzel und der Exponent jeder Exponentialgröße eine gewisse Art von Größen bezeichnet, und folglich nichts anders als eine Benennung der Größen ist, deren Anzahl der Coeffizient ausdrückt, so werden auch Exponentialzahlen wie genannte Zahlen dividirt, indem man zu dem Quotienten des Coeffizienten durch die gemeine Zahl die Wurzel und den Exponenten der gegebenen Exponentialzahl hinzusetzt.

2. Eine gemeine Zahl durch eine Exponentialzahl kann nicht wirklich dividirt werden.

3. Eine Exponentialzahl durch eine Exponentialzahl kann ebenfalls nicht wirklich dividirt werden.

Daß eine gemeine oder Exponentialzahl durch eine Exponentialzahl nicht wirklich dividirt werden könne, läßt sich aus der Division genannter Zahlen beweisen; denn so oft der Divisor eine genannte Zahl ist, kann die Division nicht statt finden, da es keinen Sinn hätte, 8 oder 8 Gulden durch 4 Pfund zu dividiren oder in 3 Pfund Theile zu theilen, oder endlich von 8 oder 8 Gulden den 3 Pfundmal kleineren Theil zu suchen. Da nun Exponentialzahlen nichts anders, als genannte Zahlen sind, so kann auch bey dieser die Division nicht statt finden, so oft der Divisor eine Exponentialzahl ist, und die Division muß daher in einem solchen Falle nur angezeigt werden.

b. Die Division einer gemeinen Zahl durch eine Exponentialzahl wird angezeigt, indem man zu dem Quotienten der gemeinen Zahl durch den Coeffizienten der Exponentialzahl auch noch die Wurzel mit dem Exponenten der gegebenen Exponentialzahl als Divisor anschreibt.

Sollte man z. B. 8 durch $4a^m$, oder 12 durch $3\sqrt[2]{4,5}$ dividiren, so würde dieß auf folgende Art angezeigt werden: $8 : 4a^m = 2 : a^m$ und $12 : 3\sqrt[2]{4,5} = 4 : \sqrt[2]{4,5}$.

c. Ist der Dividend durch den Coeffizienten der gegebenen Exponentialzahl nicht theilbar, so kann die Division auch in Bruchform angezeigt werden.

Sollte man z. B. $12m$ durch $16mg^3b^2$ oder 9 durch $15\sqrt[3]{a^2g}$ dividiren, so könnte dieß auf folgende Art geschehen: $12m : 16mg^3b^2 = \frac{3}{4} : g^3b^2$ und $9 : 15\sqrt[3]{a^2g} = \frac{3}{5} : \sqrt[3]{a^2g}$.

d. Die Division einer Exponentialzahl durch eine Exponentialzahl wird wie gewöhnlich angezeigt und die Coeffizienten im Divisor und Dividend durch den gemeinschaftlichen Theiler abgekürzt.

Sollte man z. B. $32a^4$ durch $8b^3$, oder $24\sqrt[3]{a^m}$ durch $3(4,37)^2$ dividiren, so würde die Division auf folgende Art angezeigt werden: $32a^4 : 8b^3 = 4a^4 : b^3$, und $24\sqrt[3]{a^m} : 3(4,37)^2 = 8\sqrt[3]{a^m} : (4,37)^2$.

e. Haben die gegebenen Exponentialzahlen gleiche Wurzeln und keine oder gleiche Wurzelexponenten, so wird die Division abgekürzt, indem

man die Wurzel nur einmal schreibt, und zu derselben den Unterschied des Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendus hinzusetzt.

Sollte man z. B. $24a^7$ durch $6a^5$ oder $15\sqrt[3]{88}$ durch $5\sqrt[3]{48^3}$ dividiren, so würde die Division auf folgende Art abgekürzt werden: $24a^7 : 6a^5 = 4a^7 : a^5 = 4a^2$ und $15\sqrt[3]{4,8^8} : 5\sqrt[3]{4,8^3} = 5\sqrt[3]{4,8^8} : \sqrt[3]{4,8^3} = 3\sqrt[3]{4,8^5}$.

Daß dieses Verfahren richtig sey, läßt sich auf folgende Art beweisen: $24a^7$ ist $= 24aaaaaaa : 6a^5 = 6aaaaa$ folglich ist $24a^7 : 6a^5 = 24aaaaaaa : 6aaaaa = 4aa = 4a^2$; eben so ist $15\sqrt[3]{4,8^8} = 15 \times (\sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8})$, und $5\sqrt[3]{4,8^3} = 5 \times (\sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8})$; folglich $15\sqrt[3]{4,8^8} : 5\sqrt[3]{4,8^3} = 15 \times (\sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{48} \times \sqrt[3]{48}) : 5 \times (\sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8}) = 3 \times (\sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8} \times \sqrt[3]{4,8}) = 3\sqrt[3]{4,8^5}$

Oder allgemein $a^m : a^n = a \times a \times a \times a \times a \ldots$. mmal $: a \times a \times a \times a \ldots$. nmal. Ist nun $m > n$, so nehme man, $m = n + x$ folglich ist $a^m = a^{n+x} = a \times a \times a \times a \ldots$. $n + x$mal und daher $a^m : a^n = a \times a \times a \ldots$. $n + x$mal $: a \times a \times a \ldots$. nmal $= a \times a \times a \ldots$. x mal $= a^x$ oder a^{m-n} da, $m = n + x$ und folglich $x = m - n$ ist.

Ist $m = n$, so kann man, wenn man $x = o$ setzt, auch wieder $m = n + x$, annehmen, und es ist daher wieder $a^m = a^{n+x}$ und folglich $a^m : a^m = a \times a \times a \ldots$. $n + x$mal $: a \times a \times a \ldots$. nmal $= a \times a \times a \ldots$. $x$mal $= a^x$ oder $= a^{m-n}$, weil $m = n + x$ und $x = m - n$ ist.

Ist endlich $m > n$, so ist $m + x = n$, folglich $m = n - x$ und $a^m = a^{n-x}$ und daher $a^m : a^n = a \times a \times a \ldots$.

$n - x$mal : $a \times a \times a \ldots\ldots n$mal $= a \times a \times a \ldots\ldots - x$mal $= a^{-x}$ oder a^{m-n}, weil $m = n - x$ und folglich $-x = m - n$ ist.

f. Hieraus lassen sich folgende Sätze erklären.

1. Jede Exponentialzahl mit dem Potenzexponenten o ist $= 1$.

So ist z. B. $a^0 = 1$ oder $\sqrt[3]{8^0} = 1$.

Der Beweis läßt sich aus dem vorigen Satze so darstellen: $a^m : a^n = a^{m-n}$; ist nun $m = n$, so ist $m - n = o$ und folglich $a^m : a^n = a^{m-n} = a^0$; da ferner $m = n$ ist, so ist auch $a^m = a^n$; denn gleiche Wurzeln auf gleiche Potenzen erhoben, geben gleiche Produkte, und es ist folglich $a^m : a^n = 1$, weil jede Zahl durch sich selbst dividirt 1 zum Quotienten gibt: Nun ist $a^m : a^n = a^0$ und $a^m : a^n = 1$, so ist auch $a^0 = 1$, weil zwey Größen, welche derselben dritten gleich sind, auch einander gleich sind.

2. Jede Exponentialzahl mit einem negativen Potenzexponenten ist gleich einem Bruche, dessen Zähler 1 und dessen Nenner dieselbe Exponentialzahl, jedoch mit dem positiven Potenzexponenten ist.

So ist z. B. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ und $\sqrt[4]{8^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8^2}}$

Dieß läßt sich ebenfalls aus dem obigen Satze auf folgende Art beweisen: $a^m : a^n = a^{m-n}$; es sey nun $m < n$ so ist $m + x = n$ oder $m = n - x$, folglich $a^m = a^{n-x}$ und $a^m : a^n = a^{n-x} : a^n = aaa \ldots\ldots n - x$mal : $a \times a \times a \ldots\ldots n$mal $= a \times a \times a \ldots\ldots - x$mal $= a^{-x}$; da ferner $m + x = n$ ist, so ist auch $a^n = a^{m+x}$ und folglich $a^m : a^n = a^m : a^{m+x}$ oder, die Division in Bruchform angeschrieben, $= \frac{a^m}{a^{m+x}} = \frac{a \times a \times a \times a \ldots\ldots m\text{mal}}{a \times a \times a \times a \ldots m + x\text{mal}}$, und wenn man die gleichen Faktoren im Zähler und Nenner in

gleicher Anzahl, folglich mmal durchstreicht, $= \frac{1}{a \times a \times a \ldots x\text{mal}}$

$= \frac{1}{a^x}$. Da nun $a^m : a^x = a^{-x}$ und eben so $a^m : a^x = \frac{1}{a^x}$,

so ist auch $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, weil zwey Größen, welche derselben dritten gleich sind, auch unter einander gleich sind.

§. Um die Division in Exponentialzahlen leichter zu vollbringen, ist es gut, sich vorher die einzelnen Glieder des Dividendus und Divisors nach den Potenzen einer und derselben allgemeinen Größe zu ordnen.

Sollte man z. B. $45\,a^4x - 10\,x\sqrt{x^3} + \frac{\sqrt[3]{m}}{5x} - 90\,a^2b^3x$

$+ 75\,a\,x\sqrt[3]{m^4} - 12\,a^4\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{m^2} - \frac{12\sqrt[3]{m^3}}{25\,x^2}$

$+ 24\,a^2b^3\sqrt[3]{m^2} - 20\,a\sqrt[3]{m^6}$ durch $15\,x - 4\sqrt[3]{m^2}$ dividiren, so würde man die Glieder, folgendermaßen ordnen und dann dividiren:

$$45a^4x-12a^4\sqrt[3]{m^2}-90a^2b^3x+24a^2b^3\sqrt[3]{m^2}+75ax\sqrt[3]{m^4}-20a\sqrt[3]{m^6}-10x\sqrt{x^3}+\tfrac{8}{3}\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{m^2}+\frac{9\sqrt[3]{m}}{5x}-\frac{12\sqrt[3]{m^2}}{25x^2}$$

$$\pm45a^4x\mp12a^4\sqrt[3]{m^2}$$

$$-90a^2b^3x+24a^2b^3\sqrt[3]{m^2}$$

$$\pm90a^2b^3x\pm24a^2b^3\sqrt[3]{m^2}$$

$$75ax\sqrt[3]{m^4}-20a\sqrt[3]{m^6}$$

$$\pm75ax\sqrt[3]{m^4}\mp20a\sqrt[3]{m^6}$$

$$-10x\sqrt{x^3}+\tfrac{8}{3}\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{m^2}$$

$$\pm10x\sqrt{x^3}\mp\tfrac{8}{3}\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{m^2}$$

$$+\frac{9\sqrt[3]{m}}{5x}-\frac{12\sqrt[3]{m^2}}{25x^2}$$

$$+\frac{9\sqrt[3]{m}}{5x}-\frac{12\sqrt[3]{m^2}}{25x^2}$$

$$:145x-4\sqrt[3]{m^2}=3a^4-6a^2b^3+5a\sqrt[3]{m^4}-\tfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3\sqrt[2]{m}}{25x^2}$$

Aufgaben zur Uibung.

1. Aufgabe. Die Zahl: $32a^3 - 8\sqrt[3]{m^5} + 128b^2d^3 + \frac{16}{5}\sqrt{4,3} - 48a^4b^2$ durch 8 zu dividiren.

2. Aufgabe. Die Zahl $14m - \frac{21m\sqrt{m^2}}{ax} - \frac{105a^3m^2}{4x} + \frac{21m\sqrt{m^4}}{64a^2x^5} - \frac{8a^3mx}{5\sqrt{m^3}} + \frac{12am}{5\sqrt{m}} + \frac{3a^5m}{\sqrt{m^3}} - \frac{3m\sqrt{m}}{80x^4}$ durch $\frac{7m}{4ax} - \frac{am}{5\sqrt{m^3}}$ zu dividiren.

3. Aufgabe. Die Zahl $72a^6 - 120a^2x - 6a^4\sqrt{a^3} + 10x\sqrt{a^3} + 24a^2\sqrt[2]{4,83^2} + 18a^4m^2x^4 - \frac{9}{4}a^4\sqrt[2]{4,83^5} - 30m^2x^5 + \frac{15}{4}x\sqrt[2]{4,83^5} - 2\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[3]{4,83^2} + 6m^2x^4\sqrt[2]{4,83^2} - \frac{25a^3x}{6,72} + \frac{5a^7b}{2,24x} - 9a^4f^2x^2 - \frac{3}{4}\sqrt[2]{4,83^7} + \frac{5a^3b\sqrt[3]{4,83^2}}{6,72x} - 3f^2x^2\sqrt{4,83^2} + 15f^2x^3$ durch $3a^4 - 5x + \sqrt[3]{4,83^2}$ zu dividiren.

Auflösungen.

1. Aufgabe. Der Quotient ist: $4a^2 - \sqrt[3]{m^5} + 16b^2d^3 + \frac{2}{5}\sqrt{4,3} - 6a^4b^2$.

2. Aufgabe. Der Quotient ist: $8ax - 12\sqrt{m^2} - 15a^4m + \frac{3\sqrt{m^4}}{16ax^4}$.

3. Aufgabe. Der Quotient ist: $24a^2 - 2\sqrt{a^3} + 6m^2x^4 - \frac{3}{4}\sqrt[2]{4,83^5} + \frac{5a^3b}{6,72x} - 3f^2x^2$.

V. Potenziren und Wurzelziehen in Exponentialzahlen.

a. Jede Exponentialzahl wird auf jede gegebene Potenz erhoben, indem man den Potenzexponenten derselben mit dem Exponenten der verlangten Potenz multiplizirt.

Sollte man z. B. 8^4 auf die fünfte Potenz oder a^m auf die nte Potenz erheben, so ist $(8^4)^5 = 8^{20}$ und $(a^m)^n = a^{mn}$. Daß dieses Verfahren richtig sey, läßt sich auf folgende Art beweisen: a^3 ist $=$ a. a. a.; sollte nun a^3 z. B. auf die zweyte Potenz erhoben werden, so heißt dieß, man sollte a^3 zweymal als Faktor nehmen, oder einmal mit sich multipliziren, nämlich $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 =$ a. a. a. $\times$ a. a. a. $=$ a. a. a. a. a. a. $= a^6$. Oder allgemein: a^m ist $=$ a. a. a. a. . . . . mmal; sollte nun a^m auf die nte Potenz erhoben werden, so ist $(a^m)^n =$ a. a. a. . . . . mmal $\times$ a. a. a. . . . . mmal $\times$ a. a. a. . . . . mmal $\times$ . . . . . nmal $=$ a. a. a. a. . . . . mnmal $= a^{mn}$.

b. Aus jeder Exponentialzahl wird jede Wurzel gezogen, wenn man den Potenzexponenten der gegebenen Exponentialzahl durch den Exponenten der verlangten Wurzel dividirt.

Sollte man z. B. aus 12^4 die Quadratwurzel oder aus a^{mn} die nte Wurzel ziehen, so ist: $\sqrt[2]{12^4} = 12^2$ und $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich auf folgende Art beweisen: a^6 ist $=$ a. a. a. a. a. a.; sollte man nun aus a^6 die Quadratwurzel ziehen, so ist: $\sqrt[2]{a^6} = \sqrt[2]{\text{a. a. a. a. a. a.}}$ $=$ a. a. a. $= a^3$, weil Quadratwurzelziehen nichts anders heißt, als einen der zwey gleichen Faktoren einer gegebenen Zahl bestimmen, und a^6 oder aaaaaa sich nur in die zwey gleichen Faktoren aaa $\times$ aaa $=$ aaaaaa $= a^6$ auflösen läßt. Oder allgemein: $a^{mn} =$ a. a. a. a. a. a. . . . . mnmal $=$ a. a. a. mmal $\times$

a. a. a. . . . mmal × . . . . nmal; folglich heißt nte Wurzel aus a^{mn} nichts anders, als einen der ngleichen Faktoren der Zahl a^{mn} bestimmen, und dieser ist a. a. a. . . . mmal $= a^m$, weil der Faktor a. a. a. . . . . mmal in der Zahl a^{mn} nmal enthalten ist.

Nun können wir noch eine zweyte Regel für das Potenziren der Exponentialzahlen aufstellen.

c. Jede Exponentialzahl, welche einen Wurzelexponenten hat, wird auf jede Potenz erhoben, wenn man den Exponenten der verlangten Potenz durch den Wurzelexponenten der Exponentialzahl dividirt, und den Quotienten mit dem Potenzexponenten der gegebenen Exponentialzahl multiplizirt. Hat die gegebene Exponentialzahl keinen Potenzexponenten, so denke man sich zu derselben den Potenzexponenten 1, und verfahre übrigens nach der Regel.

Sollte man z. B. $\sqrt[3]{8}$ auf die sechste, oder $\sqrt[2]{a^4}$ auf die achte Potenz erheben, so ist $\left(\sqrt[3]{8^1}\right)^6 = 8^2$ und $\left(\sqrt[2]{a^4}\right)^8 = a^{16}$. Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich auf folgende Art darstellen: Es sey $\sqrt[m]{a} = x$; so ist $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = x^n$; da ferner $\sqrt[m]{a} = x$ ist, so ist auch $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = x^m$ oder $a = x^m$ und $a^n = x^{mn}$; zieht man nun beiderseits die mte Wurzel, indem man nach der Regel b den Potenzexponenten der Exponentialzahl durch den Exponenten der verlangten Wurzel dividirt, so ist $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{x^{mn}}$ oder $a^{\frac{n}{m}} = x^n$ und da $x_n = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$, so ist auch $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$. Eben so läßt sich eine zweyte Regel für das Wurzelziehen der Exponentialzahlen aufstellen, nämlich:

d. Aus jeder Exponentialzahl, welche einen Wurzelexponenten hat, wird jede mögliche Wurzel gezogen, indem man den Wurzelexponenten

der gegebenen Exponentialzahl mit dem Exponenten der verlangten Wurzel multiplizirt.

Sollte man z. B. aus $\sqrt[a]{4}$ die zweite Wurzel oder aus $\sqrt[m]{a}$ die nte Wurzel ziehen, so ist $\sqrt[2]{\sqrt[a]{4}} = \sqrt[2a]{4}$ und $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Dieß läßt sich allgemein so beweisen: Es sey: $\sqrt[m]{a} = x$, so ist $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{x}$; da ferner $\sqrt[m]{a} = x$, so ist auch $a = x^m$ und beiderseits die nte Wurzel gezogen ist: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{x}$, und da $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ auch $= \sqrt[\frac{n}{m}]{x}$, so ist $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Diese vier Regeln lassen sich daher auf folgende Art zusammenstellen:

I. Jede Exponentialzahl wird auf jede Potenz erhoben, indem man entweder

a. Den Potenzexponenten der gegebenen Exponentialzahl mit dem Exponenten der verlangten Potenz multiplizirt, oder

b. Den Exponenten der verlangten Potenz durch den Wurzelexponenten der gegebenen Exponentialzahl dividirt, und mit dem Quotienten den Potenzexponenten der gegebenen Exponentialzahl multiplizirt.

II. Aus jeder gegebenen Exponentialzahl wird jede mögliche Wurzel gezogen, indem man entweder:

a. Den Potenzexponenten der gegebenen Exponentialzahl durch den Exponenten der verlangten Wurzel dividirt, oder

b. Den Wurzelexponenten der gegebenen Exponentialzahl mit dem Exponenten der verlangten Wurzel multiplizirt.

Diese so eben aufgestellten Regeln über das Potenziren und Wurzelziehen der Exponentialzahlen gelten jedoch nur für Monome. Sollten aber mehrgliedrige Exponentialzahlen (Polynome) auf irgend eine Potenz erhoben oder aus denselben eine Wurzel gezogen werden, so müssen die Regeln von dem Potenziren und Wurzelziehen der Polynome in Anwendung gebracht werden.

Anhang.

Aufgaben zur Uibung der Rechnungsarten in Exponentialzahlen.

Vorerinnerung.

Da Exponentialzahlen vorzüglich bey geometrischen oder wenigstens aus dem Gebiete der Geometrie entlehnten Aufgaben vorkommen, so wollen wir hier einige Erklärungen einschalten, deren Kenntniß zur Auflösung solcher Aufgaben nothwendig ist und für die Zukunft bey Auflösung der Aufgaben durch Gleichungen und vorzüglich durch Proportionen vielfältige Anwendung gestatten wird.

a. Ein rechtwinklichtes Viereck oder ein Quadrat (gewöhnlich auch nur schlechthin Viereck genannt) ist eine Fläche, deren Länge und Breite gleich, und deren sämmtliche Winkel ebenfalls gleich sind, so, daß jeder derselben ein rechter Winkel ist.

b. Den Flächeninhalt eines jeden Quadrates oder rechtwinklichten Viereckes findet man, wenn man die Länge mit der Breite multiplizirt, oder, was eben so viel ist, da Länge und Breite eines jeden Quadrates einander gleich sind, wenn man die Länge oder Breite desselben auf das Quadrat erhebt.

Sollte man z. B. den Flächeninhalt eines Quadrates berechnen, dessen Länge und Breite 8° 3′ ist, so würde derselbe seyn: $(8° 3′)^2 = 8° 3′ \times 8° 3′ = 8\frac{1}{2}° \times 8\frac{1}{2}° = \frac{17°}{2} \times \frac{17°}{2} = \frac{289}{4}\square° = 72\frac{1}{4}\square°$.

c. Wenn man aus dem Flächeninhalte eines Quadrates dessen Länge oder Breite berechnen soll, so findet man dieselbe, indem man aus dem gegebenen Flächeninhalte die Quadratwurzel zieht.

Sollte man z. B. die Länge oder Breite eines Feldes berechnen, dessen Flächeninhalt 1296 Quadratklafter beträgt, so wird $\sqrt[2]{1296\square^\circ} = 36^\circ$ die Länge und Breite desselben seyn.

d. Man findet den Flächeninhalt einer jeden rechtwinklichten viereckigen Fläche, wenn sie auch kein Quadrat ist (man nennt solche Flächen Rechtecke), indem man die Länge mit der Breite multiplizirt.

Sollte man z. B. die Fläche eines viereckigen Feldes finden, dessen Länge 40° und dessen Breite 32° ist, so ist derselbe $= 40^\circ \times 32^\circ = 1280\square^\circ$.

e. Ein Cubus oder Würfel ist derjenige Körper, welcher von 6 gleichen Quadraten begränzt wird, und dessen Länge, Breite und Höhe einander folglich gleich sind.

f. Man findet den körperlichen oder cubischen Inhalt eines jeden Würfels oder Cubus, indem man die Länge desselben mit der Breite und Höhe multiplizirt, oder was eben so viel ist, da Länge, Breite und Höhe eines jeden Quadrates einander gleich sind, indem man die Länge, Breite und Höhe desselben auf die dritte Potenz erhebt.

Sollte man z. B. den körperlichen Inhalt eines Würfels finden, dessen Länge, Breite und Höhe $4'\ 9''$ beträgt, so würde $(4'\ 9'')^3 = 4'\ 9'' \times 4'\ 9'' = 4\frac{3}{4}' \times 4\frac{3}{4}' \times 4\frac{3}{4} = \frac{19'}{4}$

$\times \frac{19'}{4} \times \frac{19'}{4} = \frac{6859''}{64} = 107\frac{11}{64}''$ der körperliche Inhalt desselben seyn.

g. Wenn man aus dem körperlichen Inhalte eines Würfels dessen Länge, Breite oder Höhe berechnen soll, so findet man dieselbe, indem man aus dem gegebenen körperlichen Inhalte die Cubikwurzel zieht.

Sollte man z. B. die Länge, Breite oder Höhe eines Würfels berechnen, dessen körperlicher Inhalt $13824''$ ist, so gibt $\sqrt[3]{13824} = 24'$ als die Länge, Breite oder Höhe desselben.

h. Man findet den Flächeninhalt eines jeden von lauter rechtwinklichten Vierecken begränzten Körpers, z. B. eines Quadersteines, einer Mauerziegel, einer Sandtruhe u. s. w., wenn man die Länge, Breite und Höhe desselben mit einander multiplizirt.

Sollte man z. B. den körperlichen Inhalt einer Sandtruhe, oder was eben so viel ist, berechnen, wieviel Cubikfuß Sand in einer Sandtruhe enthalten sind, deren Länge $4'$, die Breite $5'$ und die Höhe $1\frac{1}{2}'$ beträgt, so würde $4' \times 5' \times 1\frac{1}{2} = 30''$ der körperliche Inhalt derselben oder des darin enthaltenen Sandes seyn.

Aufgaben.

1. Aufgabe.

Der größte zum Schatze des Hauses Oesterreich gehörige Diamant wiegt 130 Karat. Wenn man aus dem um 14 vermehrten Gewichte desselben die Quadratwurzel zieht, so erhält man das Doppelte der Karate, um welche derjenige Diamant schwerer ist, der, sonst im Besitze der Bourbons und dann Napoleons, jetzt seit der Schlacht bey Belle Alliance im preußischen Kronschatze sich befindet. Erhebt man den vierten Theil vom Ge-

wichte des zweyten auf die dritte Potenz, so erhält man eine Zahl, welche um 1279 größer ist, als das Quadrat von dem Gewichte desjenigen Diamanten, der sich im russischen Scepter befindet. Erhebt man endlich das vierfache Produkt vom Gewichte des ersten und zweyten auf das Quadrat, so erhält man eine Zahl, welche um 259686400 größer ist, als der Cubus von dem Gewichte desjenigen Diamanten, welcher als der größte bisher bekannte sich in dem Besitze der portugiesischen Krone befindet. Frage: Wie viel wiegt jeder dieser Diamanten?

2. Aufgabe.

Ein viereckiges Feld, welches einen Flächeninhalt von 10404 Quadratklaftern hat, soll ringsum mit Bäumen besetzt, und die Bäume 3 Klafter weit von einander gesetzt werden. Frage: Wieviel Bäume wird man brauchen?

3. Aufgabe.

Es soll ein viereckiges Wasserbecken gebaut werden, welches 10368 Cubikfuß Wasser fassen und 8 Fuß tief seyn soll. Frage: Wie lang und wie breit muß dasselbe seyn?

4. Aufgabe.

Die Oberfläche unserer Erde enthält beiläufig 9281954,3569 Quadratmeilen. Wie lang und wie breit würde eine ebene viereckige Fläche von eben demselben Flächeninhalte seyn?

5. Aufgabe.

Auf die Frage: Wann die erste Windmühle in Böhmen gebaut worden sey? gab Jemand zur Antwort: Wenn man aus der um 47383 verminderten Hälfte des Quadrates von der gegenwärtigen Jahreszahl (1832) die Quadratwurzel zieht, so erhält man die Jahreszahl, unter welcher von dem Abte Gottfried im Klostergarten des Stiftes Strahow zu Prag die erste Windmühle in Böhmen errichtet worden. Frage: In welchem Jahre ist die erste Windmühle in Prag errichtet worden?

6. Aufgabe.

Ein hölzerner Würfel von 512 Cubikzoll körperlichen Inhalt soll auf allen sechs Seiten vergoldet werden. Da man nun auf 4 Quadratzoll ein Goldblättchen rechnet, so frägt es sich: Wieviel Goldblättchen wird man zu dieser Vergoldung brauchen?

7. Aufgabe.

Wie lang und wie breit würde wohl der Würfel seyn, den man aus unserer Erde bilden könnte, wenn man ihren körperlichen Inhalt mit 2659044159,864 Cubikmeilen annimmt?

8. Aufgabe.

Ein viereckiger Platz ist mit Steinplatten belegt worden. Da nun die Platten 1,5′ lang und 1,3′ breit sind und man 4271,28 Platten gebraucht hat: so frägt es sich: Wie lang und wie breit ist dieser Platz?

9. Aufgabe.

Im Jahre 1830 ist soviel Zucker in Großbrittanien eingeführt worden, daß, wenn man die Tonne zu 30 Cubikfuß annimmt, aus demselben ein Würfel von 193 Fuß Länge, Breite und Höhe hätte gemacht werden können und noch 81143 Cubikfuß übrig geblieben wären. Frage: Wieviel Tonnen Zucker sind im Jahre 1830 in Großbrittanien eingeführt werden?

10. Aufgabe.

Wenn man die Zahl der Bewohner auf der ganzen Erde auf 872000000 Seelen annimmt, so gibt diese Zahl 1. Durch 800000 dividirt und dann auf die dritte Potenz erhoben, eine Zahl, die um 42151000 kleiner ist, als die Zahl sämmtlicher Bekenner der christlichen Religion. 2. Durch 40000 dividirt und auf die 2. Potenz erhoben, eine Zahl, die um 1492400 größer ist, als die Zahl der

Bekenner der jüdischen Religion. Endlich 3. um 1676789 vermindert, mit 3 multiplizirt und aus dem Produkte die Kubikwurzel gezogen die Zahl der Bekenner der muhamedanischen Religion. Frage: Wie groß ist die Zahl der Bekenner der christlichen, jüdischen und muhamedanischen Religion?

11. Aufgabe.

Ein viereckiges Wasserbehältniß enthält 3456 Kubikfuß Wasser, und ist 6′ tief. Frage: Wie lang und wie breit ist dasselbe?

12. Aufgabe.

Das Gold ist so dehnbar, daß man aus demselben Goldblättchen von $\frac{1}{54760}$ Zoll Dicke schlagen kann. Wie lang und wie breit würde wohl die Quadratfläche eines Goldblättchens von derselben Dicke seyn, das man aus $\frac{1}{40}$ Kubikzoll Gold bereiten könnte?

13. Aufgabe.

Ein viereckiger Obstgarten ist ganz mit Obstbäumen bepflanzt. Da nun auf jede Quadratklafter ein Baum zu stehen kömmt, und derselbe 18496 Quadratklafter im Flächeninhalte hat, so frägt es sich: Wie lang und wie breit ist dieser Garten?

14. Aufgabe.

Wenn man die Kubikwurzel der Zahl 274625000 auf die zweyte Potenz erhebt, so erhält man die Zahl der Bewohner, welche sich im Jahre 1828 in Petersburg befanden. Frage: Wie groß war die Zahl der Bewohner von Petersburg im Jahre 1828?

15. Aufgabe.

Ein viereckiges Wasserbassin enthält 8306588 Kubikschuh Wasser. Da dasselbe 12′ tief ist, so frägt es sich: Wie lang und wie breit ist dasselbe?

16. Aufgabe.

Die Universität von Wilna ist die älteste im russischen Reiche, 56 Jahre später wurde die von Dorpat, 73 Jahre nach dieser die zu Moskau, 98 Jahre nach der vorigen die zu Kasan, 16 Jahre später als diese, die zu Petersburg, und endlich 9 Jahre nach der letztern die zu Helsingfors gestiftet. Wenn man die Summe aller dieser Jahresunterschiede auf das Quadrat erhebt, und mit 39 multiplizirt, so erhält man eine Zahl, welche noch um 7120 kleiner ist, als das Quadrat der Gründungsjahrszahl der ältesten Hochschule Rußlands. Frage: In welchem Jahre sind die Hochschulen zu Wilna, Dorpat, Moskau, Kasan, Petersburg und Helsingfors gestiftet worden?

17. Aufgabe.

Im Jahre 1830 ist in Europa und Nordamerika so viel Kaffee verbraucht worden, daß, wenn man 8 Pfund Kaffee auf einen Cubikschuh rechnet, man mit dem in diesem Jahre verbrauchten Kaffee ein Feld von 848241 Quadratklaftern einen Zoll hoch bedecken könnte, wobey noch 4254656 Cubikzoll Kaffee übrig bleiben würden. Frage: Wie viel Pfund Kaffee sind in diesem Jahre in Europa und Nordamerika verbraucht worden?

18. Aufgabe.

Wenn man aus der Zahl 254945089 die Quadratwurzel zieht, so erhält man die Zahl sämmtlicher in den österreichischen Staaten bestehenden Elementarschulen, addirt man zu der Anzahl derselben die Zahl 162, so gibt die Quadratwurzel aus dieser Summe die Anzahl der daselbst bestehenden Gymnasien; vermehrt man endlich die Anzahl der letztern um 1, so gibt die Cubikwurzel aus dieser mit 4 multiplizirten Summe die Anzahl der in diesen Staaten bestehenden Universitäten. Frage: Wie groß ist die Anzahl der in den österreichischen Staaten bestehenden Elementarschulen, Gymnasien und Universitäten?

19. Aufgabe.

Die Truppen des chinesischen Kaisers sind (nach einem kaiserlichen Almanach von China im Jahre 1823) so zahlreich, daß, wenn er seine ganze Armee in einem einfachen Quarré (Viereck) aufstellen wollte, und man auf jeden Mann der Breite nach einen Raum von 2′ rechnet, dazu ein Flächenraum von 10956155625 Quadratklaftern, also von beynahe 688 Quadratmeilen erfordert würde. Frage: Wie stark ist die Armee des chinesischen Kaisers?

20. Aufgabe.

In den vereinigten Nordamerikanischen Freystaaten erschienen im Jahre 1830 ungefähr 800 Journale, von welchen zusammen nach einer ziemlich genauen Angabe so viele Exemplare abgesetzt wurden, daß, wenn man das Format und die Stärke eines jeden dieser Journale auf einen Bogen, also 2′ lang und eben so breit annimmt, man mit den in diesem Jahre abgesetzten Exemplaren dieser sämmtlichen Journale einen viereckigen Raum von 4 Meilen Länge und eben so viel Breite bedecken könnte. Frage: Wie stark war die Anzahl der abgesetzten Exemplare von den im Jahre 1830 in den Nordamerikanischen Freystaaten erschienenen Journalen?

Auflösungen.

1. Aufgabe.

Der größte Diamant im preußischen Kronschatze wiegt 136, der im russischen Scepter 195 und der größte bisher bekannte, dem Könige von Portugal gehörige, Diamant 1680 Karat.

2. Aufgabe.

Man wird zur Umpflanzung des Feldes 136 Bäume brauchen.

3. Aufgabe.

Das Wasserbecken muß 36′ lang und eben so breit seyn.

4. Aufgabe.

Eine ebene Fläche von demselben Flächeninhalte würde 3046,63 Meilen lang und eben so breit seyn.

5. Aufgabe.

Die erste Windmühle in Böhmen wurde im Jahre 1277 errichtet.

6. Aufgabe.

Man wird zur Vergoldung dieses Würfels 96 Goldblättchen brauchen.

7. Aufgabe.

Der Würfel, den man aus dem körperlichen Inhalte unserer Erde bilden könnte, würde 1385,4 Meilen lang, breit und hoch seyn.

8. Aufgabe.

Dieser Platz ist 288,6′ lang und eben so breit.

9. Aufgabe.

Im Jahre 1830 sind 242340 Tonnen Zucker in Großbrittanien eingeführt worden.

10. Aufgabe.

Die Zahl der Bekenner der christlichen Religion ist 267890000, der jüdischen 3260000, der mahomedanischen 137000000.

11. Aufgabe.

Das Wasserbecken ist 24′ lang und eben so breit.

12. Aufgabe.

Das Goldblättchen würde 37 Zoll lang und eben so breit seyn.

13. Aufgabe.

Dieser Obstgarten ist 136° lang und eben so breit.

14. Aufgabe.

Im Jahre 1828 betrug die Bevölkerung von Petersburg 422500 Seelen.

15. Aufgabe.

Das Wasserbecken ist 832 Fuß lang und eben so breit.

16. Aufgabe.

Die Hochschule in Wilna ist im Jahre 1576, die in Dorpat im Jahre 1632, die in Moskau im Jahre 1705, in Kasan im Jahre 1803, in Petersburg im Jahre 1819 und in Helsingfors im Jahre 1828 gegründet worden.

17. Aufgabe.

Im Jahre 1830 sind in Europa und Nordamerika 275096000 Pfund Kaffee verbraucht worden.

18. Aufgabe.

In den österreichischen Staaten bestehen 15967 Elementarschulen, 127 Gymnasien und 8 Universitäten.

19. Aufgabe.

Die Armee des chinesischen Kaisers zählt 1256100 Mann.

20. Aufgabe.

Die Zahl der abgesetzten Exemplare von den in den Nordamerikanischen vereinigten Staaten im Jahre 1830 erschienenen Journalen beträgt 64000000.

Gleichungen.

I. Einleitung.

a. **Eine Gleichung ist die Vergleichung des doppelten Ausdruckes einer und derselben Größe.**

Wenn man z. B. annimmt, daß 1 fl. eben so viel sey, als 60 Kreuzer, und daß folglich 1 fl. und 60 Kreuzer dieselbe Größe, denselben Werth bezeichnen, so entsteht durch die Vergleichung dieser beyden Ausdrücke, indem man sagt: **1 Gulden ist eben so viel als 60 Kreuzer**, oder durch mathematische Zeichen ausgedrückt: 1 fl. = 60 kr. eine Gleichung. Oder wenn man z. B. annimmt: $x + m$ sey $= a$ und $\frac{2x-b}{4}$ sey auch $= a$, so bezeichnen die beiden Ausdrücke $x + m$ und $\frac{2x-b}{4}$ eine und dieselbe Größe a, und es ist folglich $x + m = \frac{5x-b}{4}$ eine Gleichung.

b. **Jede Gleichung besteht daher aus zwey gleichen mathematischen Ausdrücken, welche man die Glieder der Gleichung nennt, und zwar das zur Linken das erste, das zur Rechten aber das zweyte Glied.**

Die Anwendbarkeit und der Nutzen der Gleichungen ist sehr groß; denn nicht nur, daß eine große Zahl von Aufgaben am sichersten und leichtesten durch Hilfe der Gleichungen aufgelöst werden, sondern es beruht auch ein großer Theil der mathematischen Lehrsätze auf der Lehre von Gleichungen. So können z. B.

Proportionen nur mit Hilfe der Gleichungen aufgelöst werden; der größte Theil der geometrischen Lehrsätze wird nur mit Hilfe der Gleichungen bewiesen und aufgelöst.

c. Die Gleichungen werden eingetheilt:

I. Nach der Anzahl der durch dieselben zu bestimmenden unbekannten Größen in Gleichungen von einer, zwey, drey u. s. w. unbekannten Größen.

So ist z. B. $x + 4 = 34 - \frac{3x}{4}$ eine Gleichung mit einer Unbekannten; dagegen $3x - \frac{2y}{3} = 48 + \frac{2xy}{8}$ eine Gleichung von zwey Unbekannten.

II. Nach der höchsten Potenz, in der die unbekannten Größen vorkommen, in Gleichungen des ersten, zweyten, dritten u. s. w. Grades.

Gleichungen des zweyten Grades nennt man auch quadratische Gleichungen, und Gleichungen des dritten Grades kubische Gleichungen.

Gleichungen des dritten, vierten, fünften, nten Grades heißen höhere Gleichungen, weil sie gewöhnlich nur mit Hilfe der höhern Mathematik aufgelöst werden können.

So ist z. B. $x^2 - 12 = 324$ eine Gleichung des zweyten Grades oder eine quadratische Gleichung; $3x^3 - 2xy = 428 + x$ eine Gleichung des dritten Grades oder eine kubische Gleichung.

Gleichungen eines höhern, als des ersten Grades werden wieder eingetheilt in:

1. Reine Gleichungen, wenn die unbekannte Größe nur in einer Potenz vorkömmt.

So ist z. B. $x^2 + 24a = 236 - 12c + \frac{4d}{a}$ eine reine quadratische Gleichung, weil die unbekannte Größe nur in der

zweyten Potenz vorkommt. Eben so ist $4x^3 - 2ab + \frac{3d}{c} = 428 - 2c + 3ab$ eine reine kubische Gleichung, weil die unbekannte Größe nur in der dritten Potenz vorkommt.

2. Nicht reine oder gemischte Gleichungen, wenn die unbekannte Größe in verschiedenen Potenzen erscheint.

So ist z. B. $ax + x^2 - 36 = 126 - 80$ eine nichtreine oder gemischte Gleichung des zweyten Grades, weil die unbekannte Größe in der ersten und zweyten Potenz erscheint. Eben so ist $3x + x^3b - c = 24 + 3x^2 - \frac{a}{c}$ eine nichtreine kubische Gleichung, weil die unbekannte Größe in der dritten, zweyten und ersten Potenz erscheint.

III. Nach der Anzahl der unbekannten Größen und der durch die gegebene Aufgabe sich darstellenden Gleichungen in bestimmte und unbestimmte Gleichungen.

Es müssen nämlich aus jeder Aufgabe, welche mittelst der Gleichungen aufgelöst werden soll, sich so viele Gleichungen aufstellen lassen, als unbekannte Größen in derselben vorkommen, weil nur in diesem Falle der Werth der unbekannten Größen durch Auflösung der Gleichungen genau bestimmt werden kann. Lassen sich dagegen aus einer Aufgabe nicht so viele Gleichungen aufstellen, als unbekannte Größen vorkommen, so heißen dieselben unbestimmte Gleichungen, weil sich der Werth der unbekannten Größen aus denselben nicht genau bestimmen läßt. Es gibt jedoch ausnahmsweise einzelne Fälle, wo zwar mehr unbekannte Größen als Gleichungen vorkommen, wo aber durch Anwendung gewisser Rechnungsvortheile im Verlaufe der Auflösung eine oder die andere unbekannte Größe verschwindet.

Die unbestimmten Gleichungen werden wieder eingetheilt in:

1. Ganz unbestimmte Gleichungen, welche eine unendliche Menge von Werthen für die unbekannten Größen zulassen.

So wäre z. B. die Gleichung $x + y = 9$, wo die Summe zweyer Zahlen 9 ist, eine ganz unbestimmte Gleichung; denn man kann für x und y eine unendliche Menge von ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Zahlen finden, welche jedesmal zusammengenommen 9 zur Summe geben.

2. Zum Theil unbestimmte Gleichungen, welche nur eine begränzte Anzahl von Werthen für die unbekannten Größen zulassen.

So wäre z. B. die obige Aufgabe $x + y = 9$ eine nur zum Theil unbestimmte Gleichung, wenn auch die Bedingung hinzukäme, daß die Zahlen x und y ganze und positive Zahlen seyn müssen; denn in diesem Falle können für x und y nur die Werthe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 angenommen werden.

Käme endlich noch die Bedingung hinzu, daß das Produkt dieser beyden Zahlen, deren Summe 9 ist, 20 sey, so hört diese Gleichung auf, eine unbestimmte Gleichung zu seyn, indem man jetzt für die zwey Unbekannten auch zwey Gleichungen hat, nämlich $x + y = 9$ und $x \times y = 20$.

II. Allgemeine Regeln über die Auflösung der Gleichungen.

a. Eine Gleichung auflösen heißt, dieselbe ohne Störung ihrer Richtigkeit dahin bringen, daß die unbekannte Größe ein Glied, die bekannten Größen aber das andere Glied der Gleichung bilden.

So könnte man z. B. von der Gleichung $x = \frac{32}{5} \times 15$ sagen, sie sey aufgelöst; eben so stellt $y = 3h + \frac{2a^4}{b^3} - g^3$

eine aufgelöſ'te Gleichung dar, da man, wie wir bereits im erſten Theile erklärt haben, bey allgebraiſchen Aufgaben bekannte Größen durch die erſten, unbekannte Größen aber durch die letzten Buchſtaben des Alphabetes zu bezeichnen pflegt.

Da das Weſen der Gleichungen darin beſteht, daß die beyden Ausdrücke oder Glieder der Gleichung einander vollkommen gleich ſeyen, ſo ſieht man von ſelbſt ein, daß alle Veränderungen, welche man mit Gleichungen, ohne deren Richtigkeit zu ſtören, vornehmen und wodurch man ihre Auflöſung herbeyführen kann, von der Art ſeyn müſſen, daß durch dieſelben die Gleichheit der beyden Ausdrücke nicht geſtört wird.

b. Alle Veränderungen, welche mit Gleichungen vorgenommen werden können, müſſen ſich auf folgende Grundſätze zurückführen laſſen:

I. Gleiche Größen zu gleichen Größen addirt geben wieder gleiche Größen.

Wenn z. B. a = b iſt, ſo iſt auch, wenn man zu beyden Größen c addirt, a + c = b + c. Eben ſo iſt, wenn a = b und c = d iſt, auch a + c = b + d.

Da 3 fl. = 180 kr., ſo iſt auch, wenn man zu beyden Gliedern eine Größe von demſelben Werthe, z. B. 15 kr. addirt, 3 fl. + 15 kr. = 180 kr. + 15 kr. oder 3 fl. 15 kr. = 195 kr.

II. Gleiche Größen von gleichen Größen ſubtrahirt geben wieder gleiche Größen.

Da 4 Centner = 400 Pfund, ſo iſt auch, wenn man von beyden Gliedern 25 Pf. abzieht, 4 Centner — 25 Pf. = 400 Pf. — 25 Pf. oder 400 Pf. — 25 Pf. = 375 Pf.

Wenn nämlich a = b iſt, ſo iſt auch a — c = b — c oder; wenn a = b und c = d iſt, ſo iſt auch a — c = b — d.

III. Gleiche Größen mit gleichen Größen multiplizirt, geben wieder gleiche Größen.

Da 12 Klafter = 72 Fuß, ſo iſt auch, wenn man beyde Ausdrücke mit 3 multiplizirt, 36 Klafter = 216 Fuß.

Wenn z. B. $a = b$ ist, so ist auch $a \times c = b \times c$ oder $ac = bc$; eben so ist, wenn $a = b$ und $c = d$ ist, $a \times c = b \times d$ oder $ac = bd$.

IV. Gleiche Größen durch gleiche Größen dividirt, geben wieder gleiche Größen.

Da 32 Fuß = 384 Zoll, so ist auch, wenn man beyde Glieder der Gleichung durch 8 dividirt, 4 Fuß = 48 Zoll.

Z. B. Wenn $a = b$ ist, so ist auch $a : c = b : c$ oder $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ eben so ist, wenn $a = b$ und $c = d$ ist, $a : c = b : d$ oder $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

V. Gleiche Größen auf gleiche Potenzen erhoben, geben wieder gleiche Größen.

Wenn nämlich $a = b$ ist, so ist auch $a^n = b^n$, oder wenn $a^n = b^x$ so ist auch $a^{n \cdot n} = b^{n \cdot x}$.

VI. Aus gleichen Größen gleiche Wurzeln gezogen, geben wieder gleiche Größen.

Wenn z. B. $a = b$ ist, so ist auch $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$; oder wenn $a^n = b^n$ so ist auch $\sqrt[x]{a^n} = \sqrt[x]{b^n}$.

VII. Wenn zwey Größen einer und derselben dritten Größe gleich sind, so sind sie auch einander gleich.

Wenn z. B. $a = b$ und auch $c = b$ ist, so ist auch $a = c$. Wenn Anton eben so alt ist als Karl, und Ludwig ebenfalls so alt ist als Karl, so ist auch Karl eben so alt als Ludwig. Oder: Da 2 Dukaten = 9 fl. und 1 Pfund Sterlinge auch = 9 fl., so sind auch 2 Dukaten = 1 Pfund Sterlinge.

Wie diese Grundsätze bey Auflösung der Gleichungen angewendet werden, wollen wir bey der speziellen Lehre von der Auf-

lösung der Gleichungen mit einer, zwey, drey u. s. w. unbekannten Größen deutlicher auseinander setzen.

Allgemein bemerken wir daher nur, daß es sich bey Auflösung der Gleichungen vorzüglich darum handelt, die unbekannte Größe von den bekannten, mit denen sie verbunden ist, zu befreyen und den Werth derselben in der ersten Potenz darzustellen.

Größen können aber in der Zahlenlehre nur durch die Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division verbunden vorkommen.

c. Daher ergeben sich für die Auflösung der Gleichungen folgende allgemeine Regeln:

I. Wenn die unbekannte Größe mit bekannten Größen durch die Addition verbunden ist, so wird sie von denselben befreyt, indem man dieselben von beyden Gliedern der Gleichung subtrahirt.

Z. B. In der Gleichung $x + 2b + \frac{3d}{4} = 4b - 2a$ kömmt die unbekannte Größe x mit den bekannten Größen 2b und $\frac{3d}{4}$ durch die Addition verbunden vor. Man wird sie daher von denselben befreyen, indem man dieselben von beyden Gliedern der Gleichung subtrahirt, nämlich:

$$x + 2b + \frac{3d}{4} = + 4b - 2a$$

$$- 2b - \frac{3d}{4} \qquad - 2b - \frac{3d}{4}$$

$$x \qquad = + 4b - 2a - 2b - \frac{3d}{4} = + 2b -$$

$$\text{Oder } x + 36 + \frac{2b}{c} = 248 - \frac{4b}{c}$$
$$- 36 - \frac{2b}{c} \quad - 36 - \frac{2b}{c}$$
$$x = 248 - 36 - \frac{4b}{c} - \frac{2b}{c} = 212 - \frac{6b}{c}.$$

II. Wenn die unbekannte Größe mit bekannten Größen durch die Subtraktion verbunden vorkömmt, so wird sie von denselben befreyt, indem man dieselben zu beyden Gliedern der Gleichung addirt.

Z. B. In der Gleichung $x - 3a - 4b = 212 + 12a - 8b$ ist die unbekannte Größe x mit den bekannten Größen $3a$ und $4b$ durch die Subtraktion verbunden. Man wird sie daher von denselben befreyen, indem man diese bekannten Größen zu beyden Gliedern der Gleichung addirt, nämlich:

$$x - 3a - 4b = 212 + 12a - 8b$$
$$+ 3a + 4b \qquad + 3a + 4b$$
$$x = 212 + 12a + 3a - 8b + 4b =$$
$$212 + 15a - 4b.$$

$$\text{Oder } x - 424 - \frac{5a}{8b} = 36 - 4c$$
$$+ 324 + \frac{5a}{8b} \quad + 324 + \frac{5a}{8b}$$
$$x = 360 - 4c + \frac{5a}{8b}.$$

Diese beyden Sätze lassen sich vereinfacht auch durch folgenden Satz ausdrücken:

Wenn die unbekannte Größe mit bekannten Größen durch die Zeichen + oder − verbunden vorkömmt, so wird sie von denselben befreyt,

indem man dieselben in das andere Glied der Gleichung mit entgegengesetzten Zeichen überträgt.

So wird z. B. in der Gleichung $x - \frac{3a}{b} + 234 - \frac{3c}{d} + 4ab = 248 - 12ab + \frac{8a}{b}$ die unbekannte Größe x von den mit ihr durch die Zeichen + und — verbundenen bekannten Größen befreyt, indem man dieselben mit entgegengesetztem Zeichen in das andere Glied der Gleichung überträgt, nämlich:

$$x - \frac{3a}{b} + 234 - \frac{8c}{d} + 3ab = 248 - 12ab + \frac{8a}{b}$$

die bekannten Größen mit entgegengesetzten Zeichen in das andere Glied übertragen: $x = 248 - 12ab + \frac{8a}{b} + \frac{3a}{b} - 234 + \frac{8c}{d} - 3ab$

hierauf abgekürzt: $x = 14 - 15ab + \frac{11a}{b} + \frac{8c}{d}$

III. Wenn die unbekannte Größe mit bekannten durch die Multiplikation verbunden ist, so wird sie von denselben befreyt, indem man beyde Glieder der Gleichung durch den bekannten Faktor des unbekannten Gliedes dividirt.

Z. B. In der Gleichung $2ax = 3c - d + 2a$ kömmt die unbekannte Größe mit der bekannten 2a multiplizirt vor, und man muß daher die ganze Gleichung durch 2a dividiren, um die unbekannte Größe von diesem bekannten Faktor zu befreyen, nämlich:

$$\frac{2ax}{2a} = \frac{3c - d + 2a}{2a}$$

$$x = \frac{3c - d + 2a}{2a}$$

Diese Regel ist es nun, welche in ihrer Anwendung bisweilen Anfängern Schwierigkeiten verursacht, wenn nämlich die unbe-

kannte Größe mit mehreren durch die Zeichen + und — verbundenen bekannten Größen multiplizirt erscheint. So kömmt z. B. in der Gleichung $ax + \frac{3bx}{4} = 236 - cd$ die unbekannte Größe in den durch das Zeichen + verbundenen Größen $ax + \frac{3bx}{4}$ multiplizirt vor. Um in allen solchen Fällen richtig zu verfahren, hebe man aus den mit der unbekannten Größe multiplizirten bekannten Größen die unbekannte Größe als Faktor heraus, und man erhält so zwey Faktoren, deren einen die bekannten früher mit x multiplizirten Größen, den andern aber die unbekannte Größe bildet. So würde man in der vorigen Gleichung aus $ax + \frac{3bx}{4}$ die unbekannte Größe x als Faktor herausheben, und so die zwey Faktoren $\left(a + \frac{3b}{4}\right) \times x$ erhalten. Dividirt man nun beyde Glieder der Gleichung durch den bekannten Faktor des unbekannten Gliedes, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{ax + \frac{3bx}{4}}{a + \frac{3b}{4}} = \frac{236 - cd}{a + \frac{3b}{4}}$$

so ist:

$$x = \frac{236 - cd}{a + \frac{3b}{4}}$$

Oder in der Gleichung $\frac{ax}{2} + 4bx - \frac{cx}{d} + \frac{x}{4a} - x = b - 12a$ x als Faktor herausgehoben $\left(\frac{a}{2} + 4b - \frac{c}{d} + \frac{1}{4a} - 1\right) \times x = b - 12a$ und die ganze Gleichung durch den bekannten Faktor des unbekannten Gliedes dividirt:

$$x = \frac{b - 12a}{\frac{a}{2} + 4b - \frac{c}{d} + \frac{1}{4a} - 1}$$

Daher die Regel:

Wenn die unbekannte Größe mit mehreren durch die Zeichen + und — verbundenen Größen multiplizirt erscheint, so hebe man die unbekannte Größe als gemeinschaftlichen Faktor heraus und dividire sodann beyde Glieder der Gleichung durch den bekannten Faktor des unbekannten Gliedes.

IV. Wenn die unbekannte Größe durch bekannte Größen dividirt vorkommt, so multiplizire man, um die unbekannte Größe von den Bekannten zu befreyen, beyde Glieder der Gleichung mit dem bekanten Divisor der unbekannten Größe.

So erscheint z. B. in der Gleichung $\frac{x}{ab} = cd - g$ die unbekannte Größe x durch die bekannte Größe ab dividirt, und man muß daher, um dieselbe frey zu erhalten, beyde Glieder der Gleichung mit dem bekannten Divisor ab multipliziren, nämlich:

$$\frac{x}{ab} = cd - g$$

$$\times ab \qquad \times ab$$

$$x = (cd - g) \times ab = abcd - abg.$$

Diesen Satz könnte man auch so aussprechen:

Wenn die unbekannte Größe einen Nenner oder Divisor hat, so streiche man denselben von der unbekannten Größe weg und multiplizire dagegen alle bekannten Glieder der Gleichung mit demselben.

Endlich haben wir zu den allgemeinen Regeln über die Auflösung der Gleichungen das Ordnen derselben hinzuzufügen.

d. Jede Gleichung, welche aufgelöst werden soll, muß zuvor geordnet werden.

e. Eine Gleichung ordnen, heißt sie so darstellen, daß sie folgende Eigenschaften habe:

1. Daß die unbekante Größe in keinem Gliede als Divisor erscheine.

2. Daß alle Glieder, in welchen die unbekannte Größe als Faktor vorkommt, in einem Gliede der Gleichung, gewöhnlich in dem ersten, alle übrigen Theile aber in dem andern Gliede stehen.

3. Daß die unbekannte Größe unter keinem Wurzelzeichen vorkomme.

4. Daß die unbekannte Größe, wenn sie in mehreren Potenzen zugleich vorkommt, unter jedem Potenzexponenten nur einmal erscheine.

5. Daß die einzelnen Theile, in welchen die unbekannte Größe vorkommt, nach den fallenden Potenzexponenten geordnet seyen.

6. Daß die höchste Potenz des unbekannten Gliedes positiv sey, und keine Coeffizienten habe.

Ehe wir jedoch die Anwendung dieser Regeln an einem Beyspiele darstellen, wollen wir nur noch einige Sätze vorausschicken, deren Kenntniß für die richtige Anwendung derselben nothwendig ist. Es hängt nämlich sehr viel davon ab, in welcher Ordnung diese Regeln in Anwendung gebracht werden sollen. Man befolge daher nachstehende Anweisung:

f. Um eine Gleichung gehörig zu ordnen, beobachte man folgendes Verfahren:

1. Wenn die unbekannte Größe in irgend einem Theile der Gleichung als Nenner vorkommt, so multiplizire man zuerst die ganze

Gleichung mit diesem Nenner, um denselben auf solche Art zu beseitigen.

2. Man übertrage alle diejenigen Theile, in welchen die unbekannte Größe als Faktor vorkommt, in das erste Glied, und alle übrigen in das zweyte Glied der Gleichung.

3. Man ordne die Theile des ersten Gliedes nach den Potenzexponenten der unbekannten Größe vom höchsten angefangen.

4. Man hebe aus denjenigen Theilen, in welchen die unbekannte Größe mit demselben Potenzexponenten vorkommt, dieselbe als Faktor heraus, damit dieselbe mit jedem Potenzexponenten nur einmal vorkomme.

5. Wenn die unbekannte Größe mit dem höchsten Potenzexponenten negativ ist, so multiplizire man beyde Glieder der Gleichung mit $+1$, oder was eben so viel ist, man verwandle die Zeichen $+$ und $-$ sämmtlicher Theile in die entgegengesetzten Zeichen.

Zur Uibung mögen nun folgende Beyspiele dienen:

I. Man soll die Gleichung $\frac{3b}{x} + 4a = 2x - \frac{3x}{m} + \frac{2a}{x}$ ordnen, so wird man zuerst, da die unbekannte Größe als Nenner vorkommt, mit demselben die ganze Gleichung multipliziren, nämlich:

$$\frac{3b}{x} + 4a = 2x - \frac{3x}{m} + \frac{2a}{x}$$

$$\times x \qquad\qquad \times x$$

$$\frac{3bx}{x} + 4ax = 2x^2 - \frac{3x^2}{m} + \frac{2ax}{x}, \text{ oder abgekürzt}$$

$$3b + 4ax = 2x^2 - \frac{3x^2}{m} + 2a;$$

dann alle Theile, in welchen die unbekannte Größe als Faktor vorkommt, in das erste Glied, und alle übrigen Theile in das zweyte Glied der Gleichung setzen:

$$4ax - 2x^2 + \frac{3x^2}{m} = 2a - 3b,$$

hierauf die Theile nach den Potenzexponenten der unbekannten Größe geordnet:

$$\frac{3x^2}{m} - 2x^2 + 4ax = 2a - 3b;$$

endlich da die unbekannte Größe zweymal mit dem Exponenten 2 verkömmt, dieselbe als gemeinschaftlicher Faktor herausgehoben: $\left(\frac{3}{m} - 2\right)x^2 + 4ax = 2a - 3b$, so ist die Gleichung geordnet.

II. Man soll die Gleichung $3x + 4{,}2c - \frac{2a}{x} = \frac{845}{x} - \frac{2x}{5b} + 2x^2 - 8ax + 4bx^3 + 3a$ ordnen, so wird dieselbe zuerst von der unbekannten Größe als Nenner befreyt:

$$3x + 4{,}2c - \frac{2a}{x} = \frac{845}{x} - \frac{2x}{4b} - 2x^2 - 8ax + 4bx^2 + 3a$$

$\times x \qquad \times x$

$$3x^2 + 4{,}2cx - 2a = 845 - \frac{2x^2}{5b} - 2x^3 - 8ax^2 + 4bx^3 + 3ax;$$

hierauf alle Theile mit der unbekannten Größe in das erste, und alle übrigen Theile in das zweyte Glied übertragen:

$$3x^3 + 4{,}2cx + \frac{2x^2}{5b} + 2x^3 + 8ax^2 - 4bx^3 - 3ax = 845 - 2a;$$

dann die Theile mit der unbekannten Größe nach den Potenzexponenten derselben geordnet:

$$2x^3 - 4bx^3 + 3x^2 + \frac{2x^2}{5b} + 8ax^2 + 4{,}2cx - 3ax = 845 - 2a;$$

endlich die unbekannte Größe aus jenen Theilen, wo sie unter demselben Potenzexponenten vorkömmt, als gemeinschaftlicher Faktor herausgehoben:

$$(2 - 4b)x^3 + \left(3 + \frac{2}{5b} + 8a\right)x^2 + (4{,}2c - 3a)x = 845 - 2a,$$

so ist die Gleichung geordnet.

III. Die Gleichung $-x^4+\frac{2ax}{b}+\frac{12}{x}+bx^2=4ax^2-\frac{3x}{4}+\frac{36a}{x}+2bx^3-8m$ soll geordnet werden.

Daher erstens die unbekannte Größe als Nenner beseitigt:

$$-x^4+\frac{2ax}{b}+\frac{12}{x}+bx^2=4ax^2-\frac{3x}{4}+\frac{36a}{x}+2bx^3-8m$$
$$\times x \qquad\qquad \times x$$

$$-x^5+\frac{2ax^2}{b}+12+bx^3=4ax^3-\frac{3x^2}{4}+36a+2bx^4-8mx;$$

hierauf die Theile mit der unbekannten Größe in das erste und alle übrigen in das zweyte Glied der Gleichung übertragen:

$$-x^5+\frac{2ax^2}{b}+bx^3-4ax^3+\frac{3x^2}{4}-2bx^4+8mx=36a-12;$$

dann die Theile mit der unbekannten Größe nach den Potenzexponenten derselben geordnet:

$$-x^5-2bx^4+bx^3-4ax^3+\frac{2ax^2}{b}+\frac{3x^2}{4}+8mx=36a-12$$

ferner die unbekannte Größe aus denjenigen Theilen, wo sie unter demselben Potenzexponenten vorkömmt, als gemeinschaftlicher Faktor herausgehoben:

$$-x^5-2bx^4+(b-4a)x^3+\left(\frac{2a}{b}+\frac{3}{4}\right)x^2+8mx=36a-12;$$

endlich, da die unbekannte Größe mit dem höchsten Potenzexponenten negativ ist, beyde Glieder der Gleichung mit $+1$ multiplizirt, oder, was eben so viel ist, die Zeichen $+$ und $-$ sämmtlicher Theile in die entgegengesetzten verwandelt:

$$+x^5+2bx^4-(b+4a)x^3-\left(\frac{2a}{b}-\frac{3}{4}\right)x^2-8mx$$
$$=-36a+12;$$

so ist die Gleichung geordnet.

IV. Die Gleichung $x\sqrt{a}-2bx+\frac{4am}{x^2}-\frac{2d}{x}=4ax+\frac{3a}{x^4}+\frac{2bc}{x^3}-\frac{4am}{x^4}$ soll geordnet werden, so ist:

Zuerst die unbekannte Größe als Nenner beseitigt: